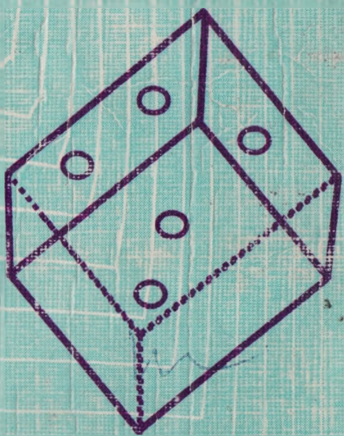
А. К. ҚАЗЕШЕВ

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Есептер жинағы



А. Қ. ҚАЗЕШЕВ

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Есептер жинағы

Алматы
"Ғылым" ғылыми баспа орталығы
2005

ББК 22.17 я 73
Қ 19

Пікір жазғандар:
Физика-математика ғылымдарының кандидаты,
профессор Қ. ҚАБДЫҚАЙЫРҰЛЫ
Физика-математика ғылымдарының кандидаты,
доцент С. А. НҰРПЕЙІСОВ

Қазешев А. Қ.
Қ 19 Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Есептер жинағы. Алматы: "Ғылым" ғылыми баспа орталығы, 2005. – 184 б.
ISBN 9965-07-337-6

Оқу құралы жоғары оқу орындарындағы экономикалық мамандықтарға арналған математика пәнінің бағдарламасына толық сәйкес келеді. Кітапта қысқаша теориялық мәліметтермен қатар типтік есептердің шығарылу тәсілдері, экономикалық мазмұнды есептер ұтымды берілген.

ББК 22.17 я 73

$\text{Қ}\,\frac{1602110000}{407(05)-05}$

ISBN 9965-07-337-6

АЛҒЫ СӨЗ

Экономика саласында іргелі ғылыми-практикалық нәтижелер математикалық әдістерді кең қолдану арқылы алынып отырғаны белгілі. Сондықтан болашақ экономика мамандарына қажетті деңгейде математикалық білім беру өзекті мәселеге айналып отыр. Сапалы білім алу оқу процесін ұтымды ұйымдастыруға да байланысты. Осы орайда оқу процесін қажетті оқу-әдістемелік құралдармен қамтамасыз етудің маңызы зор. Оқу процесіне оқытудың кредиттік жүйесі енгізіліп отырған жағдайда жоғары математика курсын терең меңгерудің бірден-бір жолы студенттердің өзіндік жұмыс белсенділігін арттыратын курс бойынша құрылған жаңа есептер жинағы болмақ. Экономикалық зерттеулерде жиі қолданылып жүрген математиканың негізгі тарауларына ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика жатады. Бұл тарауда абстракциялы-логикалық пайымдаулар басым. Соңғы жылдары математиканың кейбір тараулары бойынша мемлекеттік тілде жазылған, теориялық мәліметтерді қамтитын оқу құралдары бірен-саран болса да шыға бастады, ал практикалық есептер жинағы аса қат. Демек, математиканың жоғарыда аталып өткен тарауларын терең меңгеру үшін типтік есептерді шығарып, әртүрлі формулалардың, теориялардың қолданылу ерекшеліктерін ашып көрсететін оқу-әдістемелік құралдардың қажеттігі айқын.

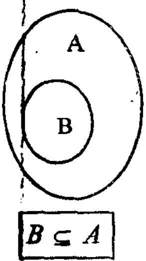
Экономикалық зерттеулерде статистикалық мәліметтерді талдау әдістерінің алатын орны ерекше. Сондықтан да, оқушыға ұсынып отырған оқу құралында вариациялық қатарларды талдау әдістері көрнекті мысалдармен түсіндіріліп берілген. Сондай-ақ басқа тақырыптар бойынша да типтік есептер шығару, формулаларды қолдану мүмкіндіктері мен ерекшеліктері айқын көрсетілген. Жоғарыда аталып өткен тарауларды толық меңгеру үшін жеткілікті түрде әртүрлі деңгейлі есептер берілген. Сонымен қатар есептердің жауаптары, кейбір қажетті функциялар мәндерінің кестелері келтірілген.

I тарау. КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАЛАР

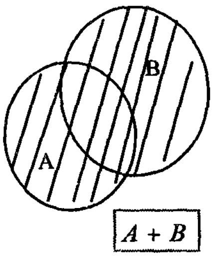
§1. Негізгі ұғымдар. Оқиғалар түрлері

Кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математиканың негізгі салаларының бірі ықтималдықтар теориясы болып табылады. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарының бірі – оқиға ұғымы. Әдетте оқиға тәжірибенің немесе бақылаудың нәтижесінде пайда болады. Тәжірибенің мысалдары: ойын сүйегін (кубын) лақтыру, тиын лақтыру, жәшіктегі әр түсті бірдей шарларды бір-бірлеп алу т.с.с. Ал осы келтірілген тәжірибелердегі пайда болатын оқиғалар: ойын кубының жақтарында жазылған сандар (1; 2; 3; 4; 5; 6); тиынның сан жазылған немесе елтаңба жазылған жағы; жәшіктен әр түсті шарлардың алынуы. Әрине бұл тәжірибелердің нәтижелерін алдын ала болжау мүмкін емес. Дегенмен, алғашқы екі тәжірибелерде тиынның сан жазылған жағы мен елтаңба жазылған жағының пайда болу мүмкіндігі тең, сондай-ақ ойын сүйегінің сан жазылған кез келген жағының пайда болу мүмкіндіктері де тең. Біз мұндай болжамды тиын мен ойын сүйегінің симметриялылықтарын ескеріп жасап отырмыз. Ал жалпы жағдайда оқиғалардың пайда болу мүмкіндігін бағалау үшін оларды белгілі бір сандармен байланыстырады. Ол сандарды *оқиғаның ықтималдығы* деп атайды. Жалпы "ықтималдық" ұғымына бірнеше түсінік беріледі. Соның бірі – ықтималдықтың классикалық анықтамасы. Ықтималдық P(A) арқылы белгіленеді.

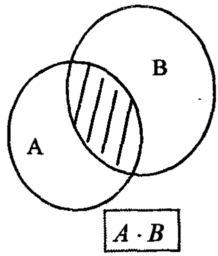
Қазіргі кезде ықтималдықтар теориясы жиындар теориясының негізгі ұғымдарын пайдаланып, аксиоматикалық түсінік негізінде құрылады. Сондықтан төменде жиындар теориясының негізгі ұғымдары келтірілген. Жиындар элементтерінің сандарына байланысты *ақырлы жиындар, ақырсыз* жиындар болып бөлінеді. Егер ақырсыз жиындардың элементтерін белгілі бір ретпен санауға болатын болса, онда ондай жиындар *саналатын жиындар* деп аталады. Натурал сандар жиыны саналатын жиынның мысалына жатады. Екі жиынның сәйкес элементтері өзара тең болса, онда ол жиындар тең жиындар немесе эквивалентті жиындар деп аталады ($A=B$). Егер В жиынының әрбір элементі А жиынына кіретін болса, онда В жиыны А жиынының ішкі жиыны деп аталады $(B \subseteq A)$ (1-сурет).



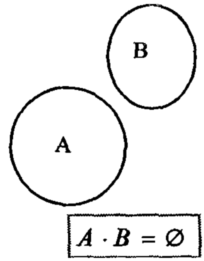
1-сурет



2-сурет



3-сурет



4-сурет

Анықтама. А және В жиындарының барлық элементтерінен құрылған жиынды А және В жиындарының **қосындысы** ($C = A + B$) деп атайды (2-сурет).

Анықтама. А және В жиындарына ортақ элементтерден құрылған жиынды осы жиындардың көбейтіндісі ($C = A \cdot B$) деп атайды (3-сурет).

Енді кездейсоқ тәжірибелердің математикалық моделін жасап оны зерттеу үшін қолданатын негізгі ұғымдарды келтірелік.

Анықталық, Ω – тәжірибеде пайда бола алатын барлық мүмкін нәтижелердің жиыны болсын. Осы жиынның әрбір элементі $\omega \in \Omega$ элементарлық оқиға деп аталады.

Жоғарыда қарастырылған оқиғаларда тиынның сан немесе елтаңба жазылған жақтарының пайда болуы, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандары жазылған ойын кубының бірдей жақтарының пайда болуы, жәшіктен кез келген түсті бір шардың алынуы – элементарлық оқиғалардың мысалдары болады.

Егер элементарлық оқиғалар жиыны төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

а) тәжірибе нәтижесінде әр уақытта элементарлық оқиғалардың біреуі пайда болады;

б) кез келген екі ω_i және $\omega_j\,(i \neq j)$ оқиғалары бірге пайда болмайды;

онда осы элементарлық оқиғалардың жиынын элементарлық оқиғалар **кеңістігі** деп атайды және Ω арқылы белгілейді. Әдетте $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = \overline{1,n}\}$ немесе $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = \overline{1,\infty}\}$, яғни ω_i оқиғалары саны ақырлы немесе саналатын жиындар қарастырылады. Ал Ω кеңістігінің ішкі **жиындарын** оқиғалар деп атайды.

Сонымен кез келген A оқиғасы Ω кеңістігінің ішкі жиыны болып табылады, яғни $A \subseteq \Omega$. Егер $A = \Omega$ болса, онда A оқиғасы **ақиқат** оқиға деп аталады. Сондай-ақ элементарлық оқиғалар жиынына қосымша бос жиын $\varnothing$ қосылып қарастырылады. Бұл жиынға **мүмкін емес** оқиға сәйкес қойылады.

Мысалы, ойын кубын лақтыру тәжірибесін қарастырсақ, мұнда $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = \overline{1,6}\}$, ω_i – цифрлар жазылған ойын кубының жақтарының пайда болуы, сол сияқты тиын лақтыру тәжірибесінде $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = 1,2\}$. Енді ойын кубын лақтырғанда пайда болатын кейбір оқиғаларды қарастыралық:

$A_1 = \{\omega_3, \omega_6\}$ – үш санына еселі цифр жазылған ойын кубының жақтарының пайда болуы;

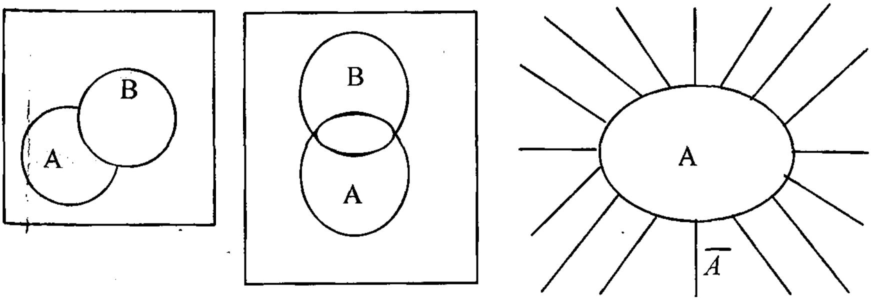
$A_2 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ – тақ сан жазылған жақтың пайда болуы;

$A_3 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – жұп сан жазылған жақтың пайда болуы;

$A_4 = \{\omega_7\}$ – мүмкін емес оқиға; .

$A_5 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ – ақиқат оқиға.

Айталық қарастырылып отырған тәжірибеге байланысты элементарлық оқиғалар кеңістігі белгілі болсын (Ω). Осы тәжірибеде пайда болатын кез келген A оқиғасы осы Ω-ның жиыны болып табылады, яғни $A \subseteq \Omega$. Сондықтан оқиғаларға қолданатын амалдар (қосу, көбейту) сәйкес жиындарға қолданатын амалдар сияқты анықталады. Егер элементарлық оқиғалар кеңістігін тіктөртбұрыш ретінде, ал оқиғаларды оның бөлігі ретінде бейнелесек, онда оқиғалардың қосындысын, көбейтіндісін және қарама-қарсы оқиғаларды төмендегідей бейнелеп көрсетуге болады.



5-сурет

Сондай-ақ оқиғаларды қосу, көбейту амалдары төмендегі қасиеттерді қанағаттандырады:

1. $A + B = B + A$.
2. $A \cdot B = B \cdot A$.
3. $(A+B) + C = A + (B+C)$.
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
5. $A \cdot (B + C) = AB + AC$.

Осыдан төмендегі теңдіктердің орындалатындығы шығады:

$A+A=A$, $A \cdot A=A$, $A+\Omega=\Omega$, $A \cdot \Omega=A$, $A+\varnothing=A$, $A+\overline{A}=\Omega$, $\overline{\varnothing}=\Omega$, $\overline{\Omega}=\varnothing$, $\overline{(\overline{A})} = A$.

Өзара қиылыспайтын А және В жиындарына сәйкес оқиғалар үйлесімсіз оқиғалар деп аталады, яғни $A \cdot B=\varnothing$. Ал егер $A_i \cdot A_j = A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ болса, онда бұл оқиғалар **қос-қостап** үйлесімсіз оқиғалар деп аталады.

Егер $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ болса, онда A_1, A_2, ..., A_n оқиғалар тобы оқиғалардың **толық тобы** деп аталады, яғни олардың қосындысы ақиқат оқиға. Жоғарыда қарастырылған мысалда A_2, A_3 оқиғалары толық топ құрайды, себебі $A_2 + A_3 = \Omega\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Оқиғаның ықтималдығы Р(А) төмендегі аксиомаларды қанағаттандырады:

1. Кез келген оқиғаның ықтималдығы нөл мен бірдің арасында болады:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad (1.1.1)$$

2. Ықтималдықтарды қосу аксиомасы: Егер A және B үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ (1.1.2)

Егер $A_1, A_2, ..., A_n$ үйлесімсіз оқиғалар болса, онда (2) аксиома орындалады:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.1.3)$$

3. Саналатын оқиғалар жиыны үшін ықтималдықтарды қосу аксиомасы:

Егер $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ оқиғалар үйлесімсіз болса, онда:

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad (1.1.4)$$

Егер элементарлық оқиғалардың ықтималдықтары белгілі болса, онда ықтималдықтар теориясының аксиомаларының көмегімен кез келген оқиғаның ықтималдығын есептеуге болады. Алайда бұл аксиомалардың элементарлық оқиғалардың ықтималдықтарын анықтауға ешбір көмегі жоқ. Ал элементарлық оқиғалардың ықтималдықтары жүргізіліп отырған тәжірибенің ерекшеліктерін пайдаланып анықталдығы.

Мысалы, жоғарыда қарастырылған тәжірибелерде:

1. $P(\omega_1)= P(\omega_2)=0,5$ – бұл тиынның жақтарының пайда болу ықтималдығы;

2. $P(\omega_i) = \dfrac{1}{6}, i = \overline{1,n}$ – бұл ойын кубының цифр жазылған жақтарының пайда болу ықтималдығы.

Бұл ықтималдықтар тиын мен ойын кубының симметриялығын пайдаланып анықталып отыр.

Егер $A_1, A_2, ..., A_n$ оқиғалары үшін $P(A_1)= P(A_2)=...= P(A_n)$ орындалса, онда бұл оқиғалар **теңмүмкіндікті** оқиғалар деп аталады.

Айталық, элементарлық оқиғалар кеңістігі Ω теңмүмкіндікті оқиғалардың жиыны болсын, яғни

1. $P(\omega_1)= P(\omega_2)=...= P(\omega_n)$

2. $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ – толық топ.

Олай болса,

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad P(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=1 \qquad (1.1.5)$$

Егер $\omega_i \in$ A ($i=\overline{1,\kappa}$, $k\le n$), онда ω_i — элементарлық оқиғалары A оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар деп аталады.

Анықтама (ықтималдықтың классикалық анықтамасы). Берілген тәжірибедегі теңмүмкіндікті элементарлық оқиғалар кеңістігінің A оқиғасына қолайлы оқиғалар санының осы кеңістіктің барлық оқиғалар санына қатынасы A оқиғасының ықтималдығы деп аталады.

Бұл анықтамадан $P(A)=\frac{m}{n}$ (1.1.6)

формуласын аламыз. Мұндағы m — A оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар саны, n — элементарлық оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалар саны. Осы анықтамадан (1.1.6) формула негізінде $m=n$ болса, $A=\Omega$ болады да, $P(A)=P(\Omega)=1$ аламыз, яғни ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең, енді $m=0$ болса, $A=\varnothing$ яғни мүмкін емес оқиға, онда $P(A)=0$, мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең. Әдетте ақиқат оқиғаны — U, ал мүмкін емес оқиғаны — V арқылы белгілейді, яғни $P(U)=1$, $P(V)=0$.

1-мысал. A,B,C кез келген оқиғалар болсын.

Мына $A_1=\overline{A}BC$, $A_2=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $A_3=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$, $A_4=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$, $A_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$ оқиғаларының мағынасы қандай?

Шешуі: A_1 оқиғасы $\bar{A}$B және C оқиғаларының бірге пайда болуын білдіреді; A_2 — A,B және C оқиғаларының ешқайсысының пайда болмағандығын көрсетеді. A_3 — $\overline{A},\overline{B}$ және $\overline{C}$ оқиғаларының ең болмағанда біреуінің пайда болатындығын білдіреді $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{AB},\overline{AC,BC,ABC})$. A_4 — A,B және C оқиғаларының тек қана біреуінің пайда болатындығын көрсетеді; A_5 — A,B,C оқиғаларының тек қана біреуі пайда болады немесе $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ пайда болады, яғни $A_5=A_2+A_4$.

2-мысал. Мерген нысанаға екі рет оқ атты. A_i — i-ші атқанда нысанаға тигізуі (i=1, 2). Енді мына A — ең болмаса бір рет тигізді, B — бір рет қана тигізді, C — екі рет тигізді, Д — екі рет тигізе алмайтын оқиғаларды A_1, A_2 оқиғалары арқылы өрнекте.

Шешуі: A_1,A_2 — сәйкес бірінші және екінші оқ атқанда нысанаға тигізуі, ал $\overline{A_1}$ және $\overline{A_2}$ — сәйкес бірінші, екінші атқанында нысанаға тигізе алмауы.

Сонда A_1+A_2 оқиғасы екі оқиғаның қосындысының анықтамасы бойынша не A_1, не A_2, немесе $A_1 \cdot A_2$ оқиғаларының пайда болатынын, яғни ең болмағанда бір оқиғаның пайда болатынын көрсетеді, олай болса $A=A_1+A_2$.

Сол сияқты B= $A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$ – тек бір рет нысанаға тигізу; C= $A_1 \cdot A_2$ – нысанаға екі рет тигізу; D= $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ – екі рет тигізбеуі.

3-мысал. Урнаға 4 ақ, 9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Урнадан кез келген бір шар алынады. Сонда ақ шар пайда болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: A – ақ шар пайда болуы оқиғасы. Бұл тәжірибеде элементарлық ω_i $(i=\overline{1,20})$ – оқиға дегеніміз – урнадан кез келген бір шар алу. Шарлар бірдей болғандықтан бұл ω_i оқиғалары теңмүмкіндікті және өзара үйлесімсіз. Элементарлық оқиғалардың жалпы саны осы урнадағы шарлар санына тең n=20, ал A оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар саны урнадағы ақ шарлар санына тең. Сондықтан ықтималдықтың анықтамасы бойынша:

$$P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

Ықтималдықтың анықтамасын пайдаланып есептер шығарған кезде комбинаторика формулалары жиі қолданылады. Сондықтан, табиғаты әр түрлі болып келетін, өзара айырмашылығы бар элементтерден құрастырылған комбинациялардың үш типін қарастырайық.

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша орналастырулар деп, әрқайсысы бір-бірінен не құрамы бойынша, не орналасу реті бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Орналастырулардың жалпы саны мына формуламен анықталады:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (1.1.7)$$

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен n элемент бойынша алмастырулар деп әрқайсысы бір-бірінен тек орналасу реті бойынша ғана ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Алмастырулардың жалпы саны:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n! \qquad (1.1.8)$$

Сондай-ақ алмастыруларды орналастырулардың жеке түрі ретінде қарастыруға болады, яғни

$$P_n = A_n^n = n!$$

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша терулер деп әрқайсысы бір-бірінен тек құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Терулердің жалпы саны мына формуламен есептелінеді:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (1.1.9)$$

Бұл жерде n! (n факториал) мына түрде есептелінеді

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$ және $0!=1$ деп қабылданады.

4-мысал. а) Әрбір Ө, Н, Ж, Е, Д, У әріптері бөлек карталарға жазылған. Содан кейін карталар араластырылып кез келген ретпен бір қатарға орналастырылған. Сонда "ЖӨНДЕУ" сөзінің пайда болуының ықтималдығы қандай?

б) Әрқайсысында бір әріп жазылған карталардан "БАРЛЫҚ" сөзі құрылған. Карталарды араластырып, содан кейін бір-бірлеп алған ретімен сөз құрастырылады. Сонда "ЛАҚ" сөзінің пайда болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: а) Берілген алты картаның бір қатарға әртүрлі орналасуларының бір-бірінен айырмашылығы олардың қандай ретпен орналасқандығында болады. Сондықтан ондай орналасулардың жалпы саны (1.1.9) формуламен анықталады, яғни

$n=P_6=6!=720$

Берілген алты картаның әрбір орналасу комбинацияларын оқиға ретінде қарастырсақ, онда олар теңмүмкіндікті, үйлесімсіз оқиғалар болады. Ал бізде қолайлы элементарлық оқиғалар саны $m=1$.

Себебі карталар әртүрлі комбинациямен орналасқанда "ЖӨНДЕУ" сөзі бір-ақ рет кезігеді. Сонда $P = \dfrac{1}{P_6} = \dfrac{1}{720}$;

б) Берілген алты карталардан үш карта бойынша орналастырулар саны n= A_6^3. Ал үш әріптен тұратын комбинациялардың бізге керегі біреу-ақ, яғни "ЛАҚ", олай болса $m=1$. Сөйтіп $P=\dfrac{1}{A_6^3}=\dfrac{1}{120}$.

Осы жерде комбинаторика формулаларын пайдаланғанда мынадай екі ережені жиі қолданатынымызды ескерте кеткен жөн.

Қосу ережесі: Егер әртүрлі А және В элементтерін сәйкес n және m рет жолмен таңдап ала алатын болсақ, онда осы екі элементтің біреуін (А-ны болмаса В-ны) $m+n$ рет жолмен таңдап алуға болады.

Көбейту ережесі: Егер бір топта m элемент, ал екінші топта n элемент болса, онда әрбір топтың бір элементтен алып құрылған қосақтардың саны $n \cdot m$ көбейтіндісіне тең болады.

Расында бірінші топтың бір элементі екінші топтың әрбір элементімен қосақталынады және керісінше, сондықтан қосақтардың жалпы саны $m \cdot n$ көбейтіндісімен анықталады.

5-мысал. Цехта 6 ер адам, 4 әйел адам жұмыс істейді. Табельдегі нөмірлері бойынша 7 адам таңдап алынды. Таңдап алынған адамдардың ішінде 3 әйел бар болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Табельдегі нөмірлері бойынша барлығы 10 адамнан 7 адам таңдап алудың жалпы саны 10 элементтен 7 элемент бойынша алынған терулер саны сияқты есептелінеді, яғни:

$$n = C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!3!}.$$

Ал 3 әйелді табельдік нөмерлері бойынша 4 әйелдің ішінен таңдап алудың саны (1.1.9) формула бойынша:

$$m_1 = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!}.$$

Сондай-ақ 6 ер адамнан 4 ер адам таңдаудың саны:

$$m_2 = C_6^4 = \frac{6!}{4!2!}.$$

Енді көбейту ережесін пайдалансақ таңдап алынған 7 адамның ішінде 3 әйел 4 ер адам болу мүмкіндіктерінің жалпы саны $m = m_1 \cdot m_2$ тең.

Сонымен анықталғалы отырған ықтималдық:

$$P = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_4^3 C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{1}{2}.$$

Бұдан былай ықтималдықтың анықтамасын пайдаланып есептер шығарғанда, әуелі оқиғаны белгілі бір әріп арқылы белгілеп алу қажет. Содан кейін теңмүмкіндікті, үйлесімсіз элементарлық оқиғалардың жалпы санын, сосын қолайлы элементарлық оқиғалар санын есептеген жөн.

6-мысал. Кітап сөресінде кездейсоқ ретпен 5 томнан тұратын анықтама қойылған:

а) кітаптар бірінші томнан бесінші томға дейін дұрыс ретпен орналасуының ықтималдығын табу керек;

в) ең болмағанда бір томның ретті орнында тұрмаған жағдайдың ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Сынақ ретінде кітап сөресінде кітаптардың кез келген ретпен қойылуын қарастырайық. Сонда кітаптардың бұлай орналасуларының жалпы саны

$n=P_5=5!=120$

1. А әріпі арқылы кітап сөресінде кітаптардың том нөмірлерінің өсу ретімен орналасуын білдіретін оқиғаны белгілейік. Бұл оқиғаға қолайлы элементарлық оқиға біреу-ақ. Сондықтан

$$P(A)=\frac{1}{120}.$$

2. В әріпі арқылы, ең болмағанда бір том ретті орнында болмауын білдіретін оқиғаны белгілейік. Мұндай оқиғалар саны $m=n-1$, яғни $m=119$. Себебі кітаптардың том нөмірлері бойынша дұрыс орналасу саны бірге тең, ал қалған орналасулар В оқиғасын анықтайды. Сонымен $P(B)=119/120$.

Осы жерде А және В оқиғаларының қарама-қарсы екенін ескерсек, онда $P(A)+P(\overline{A})=1$ екенін пайдаланып $P(B)=1-P(A)=$ $=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$ табамыз, яғни бұрынғы жауапты алдық.

7-мысал. Қорапта бірдей 5 бұйым бар. Оның үшеуі боялған. Қораптан кез келген екі бұйым алынды.

1. Алынған екі бұйымның біреуі боялған бұйым болуының ықтималдығын табу керек.

2. Алынған бұйымның екеуі де боялған бұйым болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: 1. Қорапта 5 бұйымның екеуін барлығы $n=C_5^2$ тәсілмен алуға болады, ал алынған екі бұйымның біреуі боялған болса, сол бір боялған, бір боялмаған бұйымдарды сәйкес $m_1=C_3^1$, $m_2=C_2^1$ тәсілмен алуға болады. Сонда екі бұйымның бірі боялған болудың барлық қолайлы элементарлық оқиғалар саны:

$$m=m_1\cdot m_2=C_3^1\cdot C_2^1=6$$

Сөйтіп, $$P=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

2. Алдыңғы пункттегі шығару жолын пайдаланып:

$m_1 = C_3^2 = 3, m_2 = C_2^0 = 1$

Сонда $$P = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} = 0{,}3.$$

Ықтималдықтарды есептегенде қайталанбалы алмастырулар, орналастырулар және терулер де пайдаланылады.

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша қайталанбалы орналастырулар деп белгілі бір ретпен жазылған m элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Мұнда әрбір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін.

Қайталанбалы орналастырулардың жалпы саны мына формуламен анықталады:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \qquad (1.1.10)$$

8-мысал. 4 және 5 цифрларының көмегімен әртүрлі қанша үш орынды сан жазуға болады?

Шешуі: Барлығы 4 және 5 екі цифрлар берілгендіктен іздеп отырған комбинацияларды бірден жазуға болады: 444, 445, 454, 544, 555, 554, 545, 544 барлығы 8 сан болады. Ал осы жауапты (1.1.10) формуласын пайдаланып та алуға болады.

$$\tilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$$

Жауабы: Барлығы 8 сан жазуға болады.

Айталық n элементтер берілсін. Осы элементтерді k топтарға бөлейік. Әрбір топтағы элементтер өзара бірдей, ал әртүрлі топтардағы элементтер бір-бірінен бөлек. Енді әрбір топтағы элементтер санын сәйкес m_1, m_2, ..., m_k арқылы белгілейік, сонда $m_1+m_2+...+m_k=n$ орындалады.

Анықтама. n элементтен n элемент бойынша қайталанбалы алмастырулар деп n элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

1. Егер $k=n$ болса, яғни барлық элементтер әртүрлі болса, онда (1.1.8) формуласы бойынша

$P=n!$

2. Егер $k<n$ болса, онда қайталанбалы алмастырулар саны мына формуламен анықталады:

$$P^n_{m_1,m_2,...,m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!} \qquad (1.1.11)$$

9-мысал. Мына 5; 3; 1; 5; 5; 1 цифрлардың көмегімен алты таңбалы қанша сан жазуға болады?

Шешуі: Берілген алты цифрды үш группаға бөлеміз: 1;1, 3;5, 5;5. Есептің шарты бойынша (1.1.11) формуланы пайдалануға болады. Сонда

$$P^{6}_{2,1,3}=\frac{6!}{2!1!3!}=60$$

Жауабы: Барлығы 60 сан жазуға болады.

Анықтама. Берілген n элементтен m элемент бойынша қайталанбалы терулер деп бір-бірінен құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады. Мұнда бір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін.

Қайталанбалы терулер саны мына формуламен анықталады:

$$\tilde{C}^{m}_{n}=C^{m}_{n+m-1}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \qquad (1.1.12)$$

10-мысал. Гүл дүкенінде 3 түсті гүлдер бар. Алынған 7 гүлден қанша әдіспен букет жасауға болады?

Шешуі: Сатып алынған гүл саны 7-ге тең. Сондықтан жасалған букет 7 гүлден тұрады. Ал осы букетке үш түсті гүлдердің әрбір түсінен бірнеше гүл кіруі мүмкін. Олай болса (1.1.12) формуланы пайдалансақ:

$$\tilde{C}^{7}_{3}=\frac{(7+3-1)!}{7!(3-1)!}=\frac{9!}{7!2!}=36$$

Жауабы: 36 әдіспен букет жасауға болады.

ЕСЕПТЕР

1. Үш тиын лақтырылып тәжірибе жүргізілсін. Сонда C_1, C_2 және C_3 бірінші, екінші және үшінші тиындардың сәйкес сан жазылған жақтарының пайда болуын білдіретін оқиғалар болсын. Енді C_i ($i=\overline{1,3}$) арқылы мына оқиғаларды өрнекте: А – бір сан жазылған жақтың, екі елтаңба жазылған жақтардың шықпауы; В – елтаңба жазылған жақтық бір реттен артық шығуы; С – үш елтаңба жазылған жақтардың шығуы; Д – үш сан жазылған жақтардың шығуы.

2. Мына оқиғаның ақиқат оқиға екенін дәлелде:

$$(A+B)(\overline{A}+B)+(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$$

3. Өрнекті ықшамда:

а) $(A+B)(A+\overline{B})$; б) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

4. Төмендегі оқиғалар жиыны толық топтар бола ма?

а) A_1 – {тиынның сан жазылған жағы};

A_2 – {тиынның елтаңба жазылған жағы}.

б) Екі тиын лақтырылған.

B_1={екі елтаңба пайда болды}, B_2= {екі сан пайда болды};

в) Екі ойын кубы лақтырылған.

C_1={екі кубта да 6 цифры пайда болды},

C_2={екі кубта да 6 цифры пайда болмады},

C_3={бір кубта 6 цифры болды, екінші кубта 6 цифры болмады}.

5. Бір мезгілде 5 ойын кубы лақтырылсын. Сонда бір мезгілде 2 алты, 2 бес және 4 цифрлары жазылған жақтардың пайда болу ықтималдығы қандай?

6. 32 картадан 10 карта алынды. Осы 10 картаның ішінде 8 картаның бір түрлі болуының ықтималдығы қандай?

7. *n* бірдей шар салынған урнадан бір шар алынып қайта салынады. Тәжірибе *n* рет қайталанғанда барлық шарлар түгел алынуының ықтималдығы қандай?

8. Жеті картаға 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 цифрлары жазылған. Карталар әбден араластырылғаннан кейін кез келген 4 карта алынды да олар солдан оңға қарай қойылды. Сонда 5 4 6 3 саны шығатындығының ықтималдығы қандай?

9. 36 картаның кез келген 3 картасы алынды. Сонда тұз, король, дама картасының шығу ықтималдығы қандай?

10. Топтағы 15 студентке, оның сегізі қыздар, театрға 8 билет берілді. Сонда театрға билет алған 8 студенттің екеуі қыздар болуының ықтималдығы қандай?

11. Ойын сүйегін лақтырғанда жұп сан шығуының ықтималдығы қандай?

12. Экспедициядағы 20 машинаның кез келген 5 машинасы тексеруге алынды. Экспедицияда 2 машина істен шыққан болатын.

а) алынған 5 машинаның барлығы да жарамды болуының ықтималдығы қандай?

б) алынған 5 машинаның біреуі істен шыққан, ал төртеуінің жарамды болуының ықтималдығы қандай?

13. Әрбір 100 картаға 1-ден 100 дейін сан жазылған. Алынған кез келген бір картада 5 цифріне еселі болатын сан шығуының ықтималдығы қандай?

14. Жәшіктегі 15 детальдің 10-ны боялған. Жинаушы кез келген 3 деталь алды. Алынған 3 деталь да боялғандығының ықтималдығы қандай?

15. Бірінші жәшікте 1-ден 5-ке дейін, ал екіншісінде 6-дан 10-ға дейін нөмірленген шарлар бар. Әрбір жәшіктен бір-бірден шар алынды. Алынған екі шардың нөмірлерінің қосындысы 11 болуының ықтималдығы қандай?

16. Студент 60 сұрақтың 50-ін біледі. Әрбір билет екі сұрақтан тұрады. Алған билеттегі екі сұрақты да білетіндігінің ықтималдығы қандай?

17. Топтағы 30 оқушының бақылау жұмысында 6-ы "5", 10-ы, "4", ал 9-ы "3" деген бағалар алды. Тақтаға үш оқушы шақырылды. Шақырылған үш оқушының да "2" алғандығының ықтималдығы қандай?

18. Берілген кубтың барлық жақтары боялған. Куб бірдей 1000 бөлікке бөлінген. Пайда болған кішкентай кубтар мұқият арастырылып, содан кейін бір куб алынды. Алынған кішкене кубтың: а) бір жағы боялғандығының ықтималдығы қандай? б) екі жағы боялғандығының ықтималдығы қандай? в) үш жағы боялғандығының ықтималдығы қандай?

19. Белгілі бір 6 дүкенді 3 ревизор тексеруі керек еді. Әр ревизор 2 дүкенді тексеруі тиіс. Тексеруші ревизорлар кездейсоқ бөлінді. Сонда бірінші ревизордың кез келген екі дүкенге жіберілуінің ықтималдығы қандай?

20. 36 картаның кез келген үшеуі алынды. Алынған үш картаның екеуі түз болуының ықтималдығы қандай?

21. Қорапта нөмірленген бірдей 6 куб бар. Қораптан кез келген ретпен барлық кубтар алынды. Алынған кубтар нөмірлерінің өсу ретімен шығуының ықтималдығын табу керек.

22. Дайындалған 10 детальдің 7-і сапалы. Осыдан алынған кез келген 6 детальдің 4-і сапалы болуының ықтималдығы қандай?

23. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Екі сүйекте пайда болған сандардың айырмасының абсолют шамасы 2-ге тең болғандығының ықтималдығын табу керек.

24. Қораптағы бірдей 6 шар нөмірленген. Кез келген ретпен бір-бірлеп шарлар алынып бір қатарға солдан оңға қарай қойылған. Сонда алдын ала ойланған бір сан шығатындығының ықтималдығын табу керек.

25. Орыс алфавитінің 32 әрпі әртүрлі карталарға жазылған. Содан кез келген 5 карта алынып олар бір қатарға қойылған. Сонда "сурет" сөзінің пайда болуының ықтималдығын табу керек.

26. Урнада 5 ақ және 3 қара шар бар. Кез келген екі шар алынды. Сонда алынған шарлар әр түсті болуының ықтималдығы қандай?

27. Винтовкадан 120 рет оқатылды. Сонда оқтың нысанаға тию жиілігі 0,85-ке тең болды. Оқ қанша рет нысанаға дәл тиді?

28. Дайындалған 200 бұйымның бақылау кезінде 8 данасы сапасыз болып шықты. Сапасыз бұйымдардың пайда болу жиілігі қандай?

29. Ойын сүйегі лақтырылғанда 3-ке еселі болатын санның шығу ықтималдығын табу керек.

§ 2. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары. Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы

1. Ықтималдықтарды көбейту теоремасы

Егер А және В тәуелді оқиғалар болса, онда

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)\,, \tag{1.2.1}$$

мұнда $P_A(B), P_B(A)$ – шартты ықтималдықтар. Егер А және В тәуелсіз оқиғалар болса онда (1.2.1.) формуладан

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \tag{1.2.2}$$

2. Ықтималдықтарды қосу теоремасы

Егер А және В үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2.3}$$

Егер А және В үйлесімді оқиғалар болса, онда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{1.2.4}$$

3. Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы туралы теорема

A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n оқиғалары жинақ бойынша тәуелсіз болсын. Осы оқиғалардың ең болмағанда біреуінің (А оқиғасы) пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2,\ldots\overline{A}_n)=1-q_1q_2\ldots q_n \tag{1.2.5}$$

Жеке жағдайда, егер A_1, A_2, A_3,..., A_n оқиғаларының пайда болуының ықтималдықтары бірдей болса, яғни

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p,$$

онда

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (1.2.6)$$

1-мысал. 36 картаның ішінен кез келген 2 карта алынсын. Осы екі картаның бір түсті болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Әуелі алынған екі картаның белгілі бір түске жататынының (айталық "қарға" болсын) ықтималдығын табалық. Белгілеу енгізелік. A – бірінші карта "қарға" болсын, B – екінші карта да "қарға" болсын. Бұл екі оқиға тәуелді оқиғалар, яғни B-ның пайда болу ықтималдығы A-ның пайда болуына, не пайда болмауына байланысты өзгеріп отырады. Сондықтан

$$P(A) = \frac{9}{36}, \quad P_A(B) = \frac{8}{35}.$$

Осыдан

$$P(A \cdot B) = \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35} = \frac{2}{35}.$$

Ал енді A_1, A_2, A_3, A_4 алынған екі карта сәйкес төрт түстің біріне жататындығын көрсететін өзара үйлесімсіз оқиғалар болсын. Сонда алынған екі картаның бірдей түсті (C оқиғасы) болуы A_1, A_2, A_3, A_4 оқиғаларының кез келгені орындалса пайда болады, яғни

$C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

Олай болса

$$P(C) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{8}{35}.$$

2-мысал. Екі мерген атыс алаңында сынақ өткізуде. Бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,7, екіншісінікі – 0,8-ге тең. Егер екеуі де бір-бірден атыс жасаса, ең болмағанда біреуінің нысанаға дәл тигізетіндігінің ықтималдығы қандай?

Шешуі. Белгілеу енгізелік. A – бірінші мерген нысанаға дәл тигізді. B – екінші мерген нысанаға дәл тигізді. Бұл екі оқиға үйлесімді, себебі екі мерген де нысанаға дәл тигізуі мүмкін ғой. Сондықтан үйлесімді оқиғалардың қосындыларының ықтималдығы туралы теореманы (1.2.4) пайдаланып:

$$P(A+B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$$

екенін табамыз.

Осы мысалды ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуы туралы теореманы пайдаланып та шығаруға болатынын көрсетелік. Шынында да D – оқиғасы ең болмаса біреуінің нысанаға тигізуі болсын. Сонда

$$P(D)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}94.$$

Бұл жерде

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}3 \quad P(\overline{B})=1-P(B)=0{,}2.$$

3-мысал. Екі жәшікке дайындалған деталь салынған. Бірінші жәшікте 10 деталь, оның үшеуі стандартты, екіншісінде – 15 деталь, оның алтауы стандартты. Әрбір жәшіктен бір-бірден кез келген деталь алынды. Алынған екі детальдің де стандартты екенінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Белгілеу енгізелік. А – бірінші жәшіктен алынған деталь стандартты, В – екінші жәшіктен алынған деталь стандартты. Сондықтан $P(A)=3/10, P(B)=6/15$. Алынған екі деталь де стандартты болуы үшін А·В оқиғасы пайда болуы керек. Бұл екі оқиға да үйлесімді, себебі екеуі бірдей пайда бола алады, сондай-ақ бұл оқиғалар тәуелсіз, себебі олардың пайда болуы бір-біріне байланыссыз. Сондықтан /1.2.2./ формуланы пайдалануға болады:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}12$$

4-мысал. Деталь дайындау процесі үш операциядан тұрады. Бірінші операция кезінде сапасыз деталь дайындалудың ықтималдығы – 0,02, ал екіншіде – 0,03 және үшіншіде – 0,07. Сапасыз детальдердің пайда болуын тәуелсіз оқиғалар деп қарастырып, осы үш операциядан кейін сапалы деталь дайындаудың ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Белгілеу енгізелік. А оқиғасы – бірінші операциядан кейін сапасыз детальдің пайда болуы; В – екінші операциядан кейін сапасыз деталь пайда болуы; С – үшінші операциядан кейін сапасыз деталь пайда болуы. Есептің шарты бойынша А,В,С тәуелсіз оқиғалар. Олай болса $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ оқиғалары да тәуелсіз оқиғалар. Сондықтан D=$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ оқиғасы – үш операциядан кейін сапалы деталь дайындалуын анықтайды. Енді тәуелсіз оқиғалардың көбейтіндісінің ықтималдығының формуласын пайдаланып

$$P(D)=0{,}98\cdot 0{,}97\cdot 0{,}93\approx 0{,}884$$

екенін табамыз.

5-мысал. Сүңгуір қайықты іздеп табудың ықтималдығы 0,8, ал оны жойып жіберудің ықтималдығы 0,6-ға тең. Іздеп табылған сүңгуір қайықты жойып жіберудің ықтималдығы қандай?

Шешуі: А – оқиғасы сүңгуір қайықты іздеп тауып алуды білдіреді. В – сүңгуір қайықты жойып жіберуді білдіреді. Сонда Р(А)=0,8; Р(В)=0,6. Есептің шарты бойынша іздеп табылған қайықты жойып жіберудің ықтималдығын, яғни $P_A(B)$ ықтималдығын табу керек.

$P(B)=P(A)\cdot P_A(B)$.

Сонда $P_A(B)=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$.

6-мысал. Үш баскетболшы корзинаға бір-бірден доп лақтырды. Бірінші баскетболшының корзинаға доп түсіруінің ықтималдығы 0,9, екіншісінікі – 0,8, үшіншісінікі – 0,7. Тек бір баскетболшының корзинаға доп түсіруінің ықтималдығы қандай?

Шешуі: А – бірінші баскетболшының корзинаға доп түсіруі, В,С – екінші, үшінші баскетболшының корзинаға доп түсіруі. Бұл оқиғалар тәуелсіз. Енді мына оқиғаларды қарастырайық: $A\overline{B}\,\overline{C}$ - тек А оқиғасының пайда болуы, $\overline{A}B\overline{C}$ – тек В оқиғасының пайда болуы, $\overline{A}\,\overline{B}C$ – тек С оқиғасының пайда болуы. Бұл соңғы үш оқиғалар үйлесімсіз, сондықтан

$$D=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$

оқиғасы А,В,С оқиғаларының тек біреуінің пайда болуын білдіреді. Сөйтіп:

$$P(D)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0{,}092\cdot$$

7-мысал. Үш аңшы ұшып бара жатқан үйректі сәйкес 2/3, 3/4, 1/4 ықтималдықтарымен атып түсіре алады. Ұшып бара жатқан үйректі үшеуі де бір мезгілде атты. Үйректі атып түсіру ықтималдығы қандай?

Шешуі: Үйрек атып түсіру үшін ең болмағанда бір аңшының оғы дәл тиюі керек. Сондықтан (1.2.5) формуланы пайдаланып

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{16}$$

екенін табамыз.

Мұндағы А – үйрек атып түсірілді, A_1 – үйректі бірінші аңшы атып түсірді; A_2 – үйректі екінші аңшы атып түсірді; A_3 – үйректі үшінші аңшы атып түсірді.

8-мысал. Екі жәшікке ақ және қара түсті бірдей шарлар салынған. Айталық бірінші жәшікте m_1 ақ, n_1 қара, ал екіншісінде – m_2 ақ, n_2 қара шарлар бар болсын. Екі жәшіктен бір мезгілде бір-бірден кез келген шарлар алынған. Алынған екі шардың ең болмағанда біреуі ақ шар болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: А – оқиғасы бірінші жәшіктен ақ шар алынғандығын білдірсін, В – екінші жәшіктен ақ шар алынғандығын білдірсін. Сонда А+В оқиғасы алынған екі шардың ең болмағанда біреуі ақ шар болғандығын білдіреді. Бұл екі оқиға үйлесімді. Сондықтан (1.2.4) формуланы пайдаланамыз.

Бұл жерде $P(A)=\dfrac{m_1}{m_1+n_1}$, $P(B)=\dfrac{m_2}{m_2+n_2}$,

және А және В оқиғаларының тәуелсіздігін ескеріп

$$P(A+B)=\frac{m_1m_2+m_2n_1+m_1n_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}$$

табамыз.

9-мысал. Жәшікте бірдей 15 бұйым бар. Жәшіктен екі сапалы бұйым алудың ықтималдығы 4/15-ке тең. Жәшікте қанша сапалы бұйым бар еді?

Шешуі: Белгілеу енгізейік. А – жәшіктен бірінші рет алғанда сапалы бұйым алынды, В – жәшіктен екінші рет алғанда сапалы бұйым алынды. Бұл екі оқиға тәуелді. Сондықтан, егер κ – сапалы бұйымдар саны десек, онда:

$$P(A)=\frac{\kappa}{15}, \quad P_A(B)=\frac{\kappa-1}{14}.$$

Есептің шарты бойынша $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\dfrac{\kappa(\kappa-1)}{14\cdot 15}=\dfrac{4}{15}$.

Осыдан $\kappa^2-\kappa-56=0$, $\kappa=8$.

Сонымен жәшікте 8 сапалы бұйым болған.

ЕСЕПТЕР

30. Токтың кернеуі артса бір-бірімен тізбектес жалғанған үш элементтің бірінің істен шығуына байланысты электр жүйесінде үзіліс пайда болуы мүмкін. Элементтердің істен шығуының ықтималдықтары сәйкесінше – 0,2; 0,3; 0,4. Электр жүйесінде үзіліс болмау ықтималдығын табу керек.

Нұсқау. Электр жүйесінде үзіліс болмау үшін ешбір элемент істен шықпауы керек.

31. Бір партияда 50 зат бар, оның 5-і сапасыз. Осы партиядан алынған кез келген 30 заттың ішінде сапасыз зат біреуден артық болмауының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау. Белгілеу енгізейік. A – барлық 30 зат сапалы. B – 30 заттың біреуі сапасыз. Сонда A,B оқиғалары үйлесімсіз. Олай болса C=A+B алынған 30 заттың ішінде сапасыз зат біреуден артық еместігін білдіретін оқиға.

32. Жәшіктегі 10 детальдің 4-і боялған. Деталь жинаушы жәшіктен 3 деталь алды. Алынған үш детальдің ең болмағанда біреуі боялғандығының ықтималдығын табу керек.

33. Ақшалай-заттай лотереяда әрбір 10 000 билетке 150 заттай және 50 ақшалай ұтыс шығады. Бір билеті бар адамға не заттай, не ақшалай ұтыс шығуының ықтималдығы қандай?

34. Урнада 10 қызыл, 5 көк және 15 ақ шар бар. Түсті шар алынуының ықтималдығы қандай?

35. Лотереяда 1000 билет бар. Оның әрбір екі билетінің біріне ұтыс шығады. Екі билет сатып алынған. Осы екі билетке де ұтыс шығуының ықтималдығы қандай?

36. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Сонда пайда болған сандардың қосындысы 5-тен артық болмауының ықтималдығын табу керек.

37. Үш ойын сүйегі лақтырылған. Сонда үш сүйекте де бірдей сан пайда болуының ықтималдығы қандай?

38. Екі күміс теңгені бір рет лақтырғанда ең болмағанда бір рет "цифр" пайда болуының ықтималдығы қандай?

39. Урнада 9 қызыл, 6 көк шарлар бар. Кез келген екі шар алынды. Осы екі шардың да қызыл болуының ықтималдығын табу керек.

40. Жұмысшы үш станоктің істен шықпауын қамтамасыз етеді. Бір сағат ішінде жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істеу ықтималдығы бірінші станок үшін 0,3-ке тең, екіншісі үшін – 0,5 және үшіншісі үшін – 0,6. Мына оқиғалардың ықтималдығын табу керек:

а) бір сағат бойына ең болмағанда бір станок жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істейді;

б) екі сағат бойы үш станок те жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істейді.

41. Семьяда 4 бала бар. Ер бала мен қыз баланың дүниеге келуінің ықтималдықтары бірдей деп алып, мына оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) барлығы да ұлдар;

б) барлығы не ұлдар, не қыздар;

в) ең болмағанда біреуі қыз бала.

42. Екі мерген нысанаға оқ атуда. Бірінші мергеннің (А оқиғасы) нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,5, ал екіншісінікі (В оқиғасы) – 0,4. Егер әрбір мерген 3 рет атыс жасаған болса, ең болмағанда нысанаға бір рет тигізудің ықтималдығын табу керек.

Нұсқау. Әуелі бір атыста екі мергеннің ең болмағанда бір рет тигізуінің ықтималдығын тауып алу керек.

43. Урнада 10 шар бар. Урнадан екі ақ шар алудың ықтималдығы 2/15-ке тең. Урнада қанша ақ шар бар еді?

§ 3. Толық ықтималдықтың формуласы. Бейес формуласы

Егер А оқиғасы өзара үйлесімсіз, толық топ құратын $B_1, B_2, ..., B_n$ оқиғаларының (гипотезаларының) біреуімен бірге пайда болатын болса, онда А оқиғасының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A). \qquad (1.3.1)$$

Мұндағы $P_{B_i}(A)$ шартты ықтималдықтар. Бұл (1.3.1) формула *толық ықтималдықтың* формуласы деп аталады.

Сондай-ақ жоғарыдағы шарттар сақталғанда Бейес формуласы орындалады:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}. \qquad (1.3.2)$$

Бұл (1.3.2) формула гипотезалардың ықтималдығын А оқиғасы пайда болғаннан кейін есептеуге қолданылады.

1-мысал. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,25; 0,5; 0,25 тең. Ал әрбір партиядағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше – 0,7; 0,6; 0,8.

1. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

2. Мерзімді уақыт жұмыс істеп шыққан радиошамның екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: 1. Бұл мысалды шығару үшін толық ықтималдықтың формуласын және Бейес формуласын қолдану қажет. Ол үшін әуелі қарастырып отырған оқиғаларды белгілеп алайық:

A – радиошам белгілі мерзімде жұмыс істейді;

B_1 – радиошам бірінші партиядан алынған;

B_2 – радиошам екінші партиядан алынған;

B_3 – радиошам үшінші партиядан алынған.

Сонда:

$P(B_1)=0{,}25$ $P_{B_1}(A)=0{,}7$

$P(B_2)=0{,}5$ $P_{B_2}(A)=0{,}6$

$P(B_3)=0{,}25$ $P_{B_3}(A)=0{,}8$

B_1, B_2, B_3 оқиғалар үйлесімсіз және толық топ құрайды. Толық топ құрайтындығын тексерейік.

$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0{,}25+0{,}5+0{,}25=1.$

Сонымен толық ықтималдық формуласының шарттары орындалады, олай болса:

$P(A)=0{,}25\cdot0{,}7+0{,}5\cdot0{,}6+0{,}25\cdot0{,}8=0{,}675.$

2. Енді мерзімді уақыт жұмыс істеген радиошамның екінші партиядан алынғандығының ықтималдығын Бейес формуласын пайдаланып табамыз:

$P_A(B_2)=0{,}5\cdot0{,}6/0{,}675=0{,}445$

Сол сияқты $P_A(B_3)$, $P_A(B_1)$ – табалық.

$P_A(B_1)=175/675$, $P_A(B_3)=200/675$

Бұл жерде $P_A(B_1)+P_A(B_2)+P_A(B_3)=1$ екенін ескертеміз.

Байқап отырғанымыздай A оқиғасы пайда болғаннан кейін есептелінген мына $P_A(B_i)$ ($i=1, 2, 3$) шартты ықтималдықтар B_1, B_2, B_3 гипотезаларының ықтималдықтарының өзгергенін көрсетеді.

Ескерту ретінде айтарымыз, бұл (1.3.1) және (1.3.2) формулаларды қолданғанда алынған B_1, B_2, ..., B_n гипотезаларының үйлесімсіздігін және толық топ құратындығын тексеру қажет.

2-мысал. 350 механизмдердің 160 – бірінші сортқа, 110 – екінші сортқа, 80 – үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын механизмдердің ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,01, екінші сортқа жататындардың арасында – 0,02, үшінші сортқа жататындардың арасында – 0,04 тең. Кез келген бір механизм алынған. Алынған механизмнің сапалы екенінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Белгілеу енгізелік:

A – алынған механизм сапалы;

B_1 – алынған механизм бірінші сортқа жатады;

B_2 – алынған механизм екінші сортқа жатады;

B_3 – алынған механизм үшінші сортқа жатады.

Сонда:

$P(B_1)=160/350 \quad P_{B_1}(A)=0,99$

$P(B_2)=110/350 \quad P_{B_2}(A)=0,98$

$P(B_3)=80/350 \quad P_{B_3}(A)=0,96$

B_1, B_2, B_3 оқиғалары үйлесімсіз. Расында, айталық B_3 оқиғасы пайда болды делік, яғни алынған бір механизм үшінші сортқа жатады, олай болса B_1, B_2 оқиғасы B_3 оқиғасымен бірге пайда бола алмайды деген сөз. Себебі алынған бір механизм бір уақытта әрі үшінші, әрі екінші, әрі бірінші сортқа жатуы мүмкін емес қой.

Сондай-ақ B_1, B_2, B_3 оқиғалары толық топ құрайды:

$$P(B_1+B_2+B_3)=\frac{16}{35}+\frac{11}{35}+\frac{8}{35}=1.$$

Олай болса (1.3.1.) формуласын қолданып,

$$P(A)=\frac{16}{35}\cdot 0,99+\frac{11}{35}\cdot 0,98+\frac{8}{35}\cdot 0,96=0,98.$$

3-мысал. Бірдей үш жәшікке бірдей өлшемді шарлар салынған. Бірінші жәшікте 10 ақ, 5 қара, 3 қызыл; екінші жәшікте 9 ақ, 16 қара, 11 қызыл; үшінші жәшікте 7 ақ, 4 қара, 1 қызыл шарлар бар. Кез келген жәшіктен кез келген шар алынды. Алынған шардың қара шар болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: Мына оқиғаларды қарастырайық:

A – алынған шардың түсі қара;

B_1 – шар бірінші жәшіктен алынды;

B_2 – шар екінші жәшіктен алынды;

B_3 – шар үшінші жәшіктен алынды.

Қарастырып отырған B_1, B_2, B_3 оқиғалары – үйлесімсіз. Расында, егер айталық шар екінші жәшіктен алынса, онда B_2 оқиғасы пайда болады да, B_1, B_3 оқиғалары пайда бола алмайды. Ойымызды осылай жалғастырып B_1, B_2, B_3 оқиғаларының үйлесімсіз екеніне көз жеткізуге болады. Ал А оқиғасы B_1, B_2, B_3 оқиғаларына тәуелді. Енді үш жәшіктің бірдей екенін ескеріп:

$P(B_1)=1/3,\ P_{B_i}(A)=5/18$

$P(B_2)=1/3\ P_{B_2}(A)=16/36$

$P(B_3)=1/3\ P_{B_3}(A)=4/12$

Осыдан: $P(A)=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{18}+\frac{16}{36}+\frac{4}{12}\right)=\frac{19}{54}.$

4-мысал. Бірінші урнаға 1 ақ, 3 қара, ал екінші урнаға 4 ақ, 6 қара бірдей шарлар салынған. Бірінші урнадан бір шар алынып екінші урнаға салынды. Содан кейін екінші урнадан бір шар алынды. Екінші урнадан алынған шардың түсі қара болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: Мына оқиғаларды қарастырайық. B_1 – бірінші урнадан ақ шар алынды. B_2 – бірінші урнадан қара шар алынды, А – екінші урнадан қара шар алынды.

Бұл жерде B_1, B_2 оқиғаларын қарастыру себебі, ол әуелі бірінші урнадан қандай түсті шар алуға байланысты. Бұл екі оқиға үйлесімсіз және толық топ құрайды. Сонда топ:

$P(B_1)=3/4,\ P_{B_i}(A)=4/11$

$P(B_2)=1/4,\ P_{B_2}(A)=5/11$

Сонда толық ықтималдықтың формуласы бойынша:

$$P(A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{4}+\frac{5}{11}=\frac{17}{44}.$$

Енді осы есептің шарты орындалсын. Сонда екінші урнадан алынған қара шар бастапқыда бірінші урнада болғандығының ықтималдығын табайық:

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B2}(A)}{P(A)}=\frac{5}{17}.$$

5-мысал. Дүкеге үш зауыттан бірдей бұйымдар әкелінген. Барлық әкелінген бұйымдардың бірінші зауыт 50%-тін, екіншісі 30%-

тін, үшіншісі 20%-тін жіберген. Бірінші зауыт бұйымдарының 70%-ті, екіншісінің — 80%-ті, үшіншісінің — 90%-ті бірінші сортқа жатады. Бір бұйым сатып алынды және ол бірінші сортқа жататын болып шықты. Сатып алынған бұйымның бірінші зауытта шығарылғандығының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Келесі гипотезаларды енгізелік:

B_1 — сатып алынған бұйым бірінші зауытта жасалған;

B_2 — сатып алынған бұйым екінші зауытта жасалған;

B_3 — сатып алынған бұйым үшінші зауытта жасалған.

Бұл оқиғалар үйлесімсіз, расында бір дана бұйым мысалы, екінші зауытта жасалған болса, онда ол басқа зауытта жасалынуы мүмкін емес.

Сондай-ақ, A — сатып алынған бұйым бірінші сортқа жатады.

Енді B_1,B_2,B_3 оқиғаларының ықтималдықтарын, A — оқиғасының шартты ықтималдықтарын табайық.

$P(B_1)=0,5$, $P(B_2)=0,3$, $P(B_3)=0,2$, $P_{B1}(A)=0,7$, $P_{B2}(A)=0,8$, $P_{B3}(A)=0,9$.

Сонда:

$P(A)=0,5\cdot 0,7+0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9=0,77$.

Енді сатып алынған бұйым бірінші зауытта жасалғандығының ықтималдығын Бейес формуласы арқылы анықтаймыз:

$$P_A(B_1)=\frac{0,35}{0,77}=\frac{35}{77}.$$

ЕСЕПТЕР

44. Спортшылардың бір тобында 20 шаңғышы, 10 велосипедші бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы шаңғышылар үшін 0,85 тең, ал велосипедшілер үшін 0,7 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

45. Екі жәшіктің әрқайсысында 20 детальдан бар. Оның ішінде бірінші жәшікте 17 стандартты, екінші жәшікте 15 стандартты деталь бар. Екінші жәшіктен кез келген бір деталь алынып бірінші жәшікке салынған. Содан кейін бірінші жәшіктен кез келген бір деталь алынды. Бірінші жәшіктен алынған детальдің стандартты болуының ықтималдығын табу керек.

46. Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8, ал екіншісінікі — 0,4 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші атқыштікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

47. Цехта үш автоматты құрылғы барлығы 5 500 бұйым жасап шығарды. Оның ішінде бірінші құрылғыда 1000, екіншісінде – 2000, ал үшіншісінде – 2 500 бұйым жасалып шығарылды. Егер бірінші құрылғының сапасыз бұйым шығаруы 0,3 %, екіншісінікі 0,2 %, үшіншісінікі 0,4 % болса, алынған кез келген бір бұйымның сапасыз болуының ықтималдығын табу керек.

48. Әрбір екі урнада 2 қара, 8 ақ шарлар бар. Бірінші урнадан бір шар алынып, екінші урнаға салынды. Содан кейін екінші урнадан бір шар алынды. Осы алынған шардың ақ болуының ықтималдығы қандай?

49. Бірінші урнада 1 ақ, 9 қара, ал екінші урнада 1 қара, 5 ақ шар бар. Әрбір урнадан бір-бірден кез келген екі шар алынды. Екі урнадағы қалған 14 шар үшінші урнаға салынды. Үшінші урнадан кез келген бір шар алынды. Осы алынған шардың ақ болу ықтималдығын табу керек.

Нұсқау. Мынадай гипотезалар қарастырған жөн:

B_1 – бірінші урнадан ақ, екінші урнадан да ақ шар алынды;

B_2 – бірінші урнадан ақ, екінші урнадан қара шар алынды;

B_3 – бірінші урнадан қара, екінші урнадан ақ шар алынды;

B_4 – бірінші урнадан қара, екінші урнадан қара шар алынды.

50. Құрылыс отрядында 70 бірінші курс, 30 екінші курс студенттері бар. Бірінші курс студенттерінің ішінде 10, ал екінші курс студенттерінің ішінде 5 қыз бар. Барлық қыздар кезекпен асханада жұмыс істейді. Кез келген бір күнде тексергенде асханада бірінші курста оқитын қыз жұмыс істеп жатқандығының ықтималдығы қандай?

51. Үш атқыштың біреуі нысанаға екі рет оқ атты. Бір атыс жасағанда нысанаға тигізудің ықтималдығы бірінші атқыш үшін 0,4-ке, екінші атқыш үшін 0,6-ға, ал үшінші атқыш үшін 0,8-ге тең. Нысанаға атылған екі оқтың да дәл тигендігінің ықтималдығы қандай?

Нұсқау. Әуелі әрбір атқыштың екі рет атқанда нысанаға тигізуінің ықтималдығын табу керек.

52. Екі студент бірдей көлемді мәтінді компьютерге енгізді. Бірінші студенттің қате жіберу ықтималдығы 0,04, ал екіншісінікі – 0,2. Тексергенде бір қате табылды. Қате жіберген бірінші студент екендігінің ықтималдығы қандай?

53. Жолаушы билет алу үшін үш кассаның біреуіне бару керек еді. Кассалардың әртүрлі қашықтықта орналасуына байланысты бұл кассаларға баруының сәйкес ықтималдықтары 0,5; 0,3; 0,2. Ал жолаушы келгенде кассаларда билеттің бар болуының ықтималдығы сәйкес кассалар үшін 0,6; 0,5; 0,4. Жолаушы кассалардың бірінен билет алды. Билетті бірінші кассадан алу ықтималдығын табу керек.

54. Жолаушы орманда адасып жүріп алаңға шықты. Алаңнан 4 жол шығады екен. Осы жолдармен жүргенде орманнан шығудың сәйкес жолдар үшін ықтималдықтары 0,6; 0,4; 0,2; 0,1. Егер жолаушының орманнан шыққаны белгілі болса, онда оның екінші жолмен шыққандығының ықтималдығы қандай?

55. Машинаның құрылысындағы 3 шамның екеуі жанып кеткен. Шамдардың жанып кетуінің сәйкес ықтималдықтары 0,3; 0,1; 0,1. Жанып кеткен екінші және үшінші шамдар екендігінің ықтималдығын табу керек.

56. Бірдей үш жәшікте бірдей шарлар бар. Біріншісінде 20 ақ, екіншісінде 15 ақ, 5 қара, үшіншісінде 20 қара шар бар. Кез келген жәшіктен бір қара шар алынды. Алынған шар екінші жәшікте болғандығының ықтималдығын табу керек.

57. Жолаушының оң қалтасында 15 теңгелік m_1 дана және 20 теңгелік n_1 дана, ал сол қалтасында 15 теңгелік m_2 дана және 20 теңгелік n_2 дана ақша болды. Ол сол қалтасынан кез келген бір ақшаны алды да оны оң қалтасына салды. Сосын оң қалтасынан бір ақша алды. Оң қалтасынан алған 20 теңгелік болып шықты. Осы 20 теңгелік бірінші қалтадан алып салынғандығының ықтималдығы қандай?

58. Дайын бұйымдар қоймасындағы бұйымдардың 70 %-ті бірінші автоматта, ал 30 %-ті екінші автоматта дайындалған. Бірінші автоматтың сапалы бұйымдар дайындауының ықтималдығы 0,98, ал екіншісінікі – 0,95-ке тең. Алынған кез келген бір бұйым сапасыз болып шықты. Осы бұйымның бірінші автоматта дайындалғандығының ықтималдығы қандай?

59. Топта 10 студент бар. Олардың үшеуі емтиханға өте жақсы, төртеуі – жақсы, екеуі – орташа және біреуі – нашар дайындалған. Емтихан билеттерінде әртүрлі 20 сұрақ берілген. Өте жақсы дайындалған студент барлық 20 сұраққа, жақсы дайындалғаны 16 сұраққа, орташа дайындалғаны 10 сұраққа, нашар дайындалғаны 5 сұраққа толық жауап бере алады. Кез келген бір студент берілген үш сұраққа толық жауап берді. Жауап берген студенттің: а) өте жақсы дайындалғандығының; б) жақсы дайындалғандығының; в) орташа дайындалғандығының; г) нашар дайындалғандығының ықтималдықтарын табу керек.

Нұсқау. Мына гипотезаларды енгізген жөн:

B_1 – өте жақсы дайындалған студент; B_2 – жақсы дайындалған студент; B_3 – орташа дайындалған студент; B_4 – нашар дайындалған студент.

Сондай-ақ , A – кез келген студент үш сұраққа толық жауап берді.

Мысалы: $P_{B_2}(A) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18}$ т.с.с.

60. Бірінші урнада 1 ақ, 2 қара, ал екіншісінде – 3 ақ, 4 қара шарлар бар. Кез келген урнадан кез келген бір шар алынды, ол ақ шар болып шықты. Сол урнадан алынған келесі шардың да ақ шар болатынының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау. B_1-шар бірінші урнадан алынды; B_2-шар екінші урнадан алынды; B_3-бірінші рет ақ шар алынды; B_4-екінші рет ақ шар алынды. A – кез келген урнадан бірінші рет алынған шар ақ болды; B – кез келген урнадан екінші рет алынған шар ақ болды.

Әуелі $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$ тауып алу керек. Сонда іздеп отырған ықтималдық

$$P_A(B) = P_A(B_1)P_{AB_1}(B) + P_A(B_2)P_{AB_2}(B).$$

61. 18 атқыштың бесеуі нысанаға 0,8 ықтималдықпен, жетеуі – 0,7; төртеуі – 0,6; екеуі – 0,5 ықтималдықпен тигізеді. Бір атқыш атыс жасады да нысанаға тигізе алмады. Атыс жасаған атқыш қайсы топтан болғандығының ықтималдығын табу керек.

Нұсқау. Атқыш бірінші, екінші, үшінші, төртінші топтан екендігінің ықтималдықтарын тауып, оларды салыстыру керек.

§ 4. Тәуелсіз сынақтар тізбегі

Екі ғана нәтижесі бар тәуелсіз сынақтарды қарастыралық. Мұндай сынақтарға теңге лақтыру, бұйымның сапалылығын тексеру, детальдің жарамдылығын тексеру т.б. сынақтар жатады.

Сонымен аталған екі нәтижені "A оқиғасы пайда болады" және "A оқиғасы пайда болмайды" деп атаймыз, сондай-ақ осы екі оқиғаның бір-біріне қарама-қарсы екенін ескеріп, сәйкес ықтималдықтарын P(A)=p және $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ деп аламыз, яғни A оқиғасының ықтималдығы тұрақты. Осындай шарттар орындалса Бернулли схемасы орынды деп айтады.

БЕРНУЛЛИ ФОРМУЛАСЫ

Тәуелсіз n сынақтарда ықтималдығы тұрақты болатын А оқиғасының дәл κ рет пайда болуының ықтималдығы Бернулли формуласымен есептеледі:

$$P_n(\kappa) = C_n^\kappa p^\kappa q^{n-\kappa}. \tag{1.4.1}$$

Мұндағы p=Р(А), q=1-p= $P(\overline{A})$. Бұл формуланы кейде *биномдық* деп те атайды.

А оқиғасының ең ықтималды m_0 рет пайда болуы мына теңсіздіктен анықталады:

$$np - q \le m_0 \le np + p \tag{1.4.2}$$

Егер np-q-бүтін сан болса, онда m_0-дің екі бүтін мәні болады, ал np-q бүтін сан болмаса, онда m_0-дің бір ғана бүтін мәні болады.

Бернулли формуласын пайдаланып мына оқиғалардың ықтималдығын анықтауға болады:

1. Тәуелсіз n сынақтарда А оқиғасының κ реттен кем пайда болатындығының ықтималдығы:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(\kappa - 1) = \sum_{i=0}^{\kappa-1} P_n(i) \tag{1.4.3}$$

2. κ реттен артық болуының ықтималдығы:

$$P_n(\kappa + 1) + P_n(\kappa + 1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{i=\kappa+1}^{n} P_n(i) \tag{1.4.4}$$

3. Кем дегенде κ рет пайда болуының ықтималдығы:

$$P_n(\kappa) + P_n(\kappa + 1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{i=\kappa}^{n} P_n(i) \tag{1.4.5}$$

4. κ реттен артық емес пайда болуының ықтималдығы

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(\kappa) = \sum_{i=0}^{\kappa} P_n(i) \tag{1.4.6}$$

Бернулли схемасында сынақтар тәуелсіз болғандықтан, осы сынақтарда ең болмаса бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P = 1 - q^n \tag{1.4.7}$$

1-мысал. Шахмат ойнау шеберлігі бірдей екі шахматшы ойын көрсетуде. Тең аяқтаған ойынды есептемегенде:

1. Төрт партияның үшеуін ұту мен сегіз партияның бесеуін ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдығы жоғары?

2. Төрт партиядан кем дегенде үш партия ұту мен сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдықтарын табу керек. Қайсысының ықтималдықтары жоғары?

Шешуі: Ойнау шеберлігі бірдей болғандықтан олардың әрбір партияда ұту ықтималдықтары 0,5 тең.

1. Төрт партиядан үш ұтыстың ықтималдығы Бернулли формуласы (1.4.1) бойынша:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Сегіз партияда 5 ұтыстың ықтималдығы:

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$$

Осыдан $P_4(3) > P_8(5)$, яғни төрт партиядан үш ұтыстың ықтималдығы, сегіз партиядан 5 ұтыстың ықтималдығынан жоғары.

2. Төрт партиядан кем дегенде үш ұтыстың ықтималдығы:

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

Сегіз партиядан кем дегенде 5 партия ұтудың ықтималдығы:

$$P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{93}{256}.$$

Осыдан 93/256 > 5/16, яғни сегіз партиядан кем дегенде бес ұтыстың ықтималдығы төрт партиядан кем дегенде 3 партия ұтыстың ықтималдығынан жоғары.

Ескерту. Егер Бернулли схемасында сынақтар саны үлкен болса, онда Бернулли формуласын пайдалану үлкен арифметикалық есептеулерге келтіреді. Сондықтан бұл жағдайда жуықтап есептеу формулаларын қолданады.

Егерде P(A)=p мәні 0,5-тің маңайында болса, онда Муавр–Лапластың локалдық және интегралдық жуықтау формулалары қолданылады.

МУАВР–ЛАПЛАСТЫҢ ЛОКАЛДЫҚ ТЕОРЕМАСЫ

Тәуелсіз n сынақтарда ықтималдығы тұрақты А оқиғасының дәл κ рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(\kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.4.8)$$

МУАВР–ЛАПЛАСТЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕОРЕМАСЫ

Тәуелсіз n сынақтарда ықтималдығы тұрақты А оқиғасының κ_1-ден кем емес κ_2-ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(\kappa_1,\kappa_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_i = \frac{\kappa_i - np}{\sqrt{npq}}, \Phi(x_i) = \int\limits_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}dx}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (1.4.9)$$

Мұндағы $\varphi(x)$, $\Phi(x_i)$ функцияларының мәндерінің кестесі бөлек келтірілген.

Муавр–Лапластың (1.4.9) формуласын пайдаланып тәуелсіз сынақтарда А оқиғасының ықтималдығының салыстырмалы жиіліктен ауытқуының абсолют шамасының ықтималдығы мына формула арқылы табылады:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (1.4.10)$$

Егерде Р(А)=p мәні 0,5-тен едәуір кіші болса, онда басқа жуықтау формуласы – Пуассон формуласы қолданылады:

$$P_n(\kappa) \approx \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}e^{-\lambda}, \ \lambda = np \qquad (1.4.11)$$

2-мысал. Тәуелсіз 600 сынақтарда тұрақты p=0,4 ықтималдықпен пайда болатын оқиғаның тура 228 рет пайда болуының ықтималдығын табу керек.

Шешуі: Бұл есептің дәл шешуі Бернулли формуласымен табылады, бірақта бұл есепте сынақтар саны n=600 өте көп. Сондықтан Муавр–Лапластың локалдық формуласын пайдаланамыз. Ол үшін әуелі x-тің мәнін табалық:

$$x = \frac{228 - 600 \cdot 0{,}4}{\sqrt{600 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = -1$$

Сонда $\varphi(-1)\approx 0{,}242$, $P_{600}(228)\approx\dfrac{0{,}242}{12}\approx 0{,}0201$.

3-мысал. Мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығы 0,75-ке тең.

1. 100 рет атқанда мына оқиғалардың ықтималдықтарын табу керек:

а) нысанаға 71-ден кем емес, 80-нен артық емес рет дәл тиді;

б) нысанаға 70-тен артық емес рет дәл тиді;

с) нысанаға 81-ден кем емес рет дәл тиді.

2. Тәуелсіз 400 рет атыс жасалғанда салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан $p=0{,}75$ ауытқуының абсолют шамасы 0,035-тен кем болатындығының ықтималдығын табу керек.

3. Салыстырмалы жиіліктің оқиғаның ықтималдығынан $p=0{,}75$ ауытқуының абсолют шамасы 0,035-тен кем болатындығының ықтималдығы 0,95-ке тең болуы үшін қанша рет тәуелсіз атыс жасау керек?

4. Тәуелсіз 100 рет атқанда нысанаға дәл тиген ең ықтималды атыс санын табу керек.

Шешуі: 1. Бұл жерде (1.4.9) формуланы қолданамыз:

а) $\kappa_1=71$ $\kappa_2=80$ $n=100$ $p=0{,}75$ $q=0{,}25$

$$x_1=\frac{71-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}}=-\frac{4}{10\sqrt{3}}\cdot 4=-0{,}9238;$$

$$x_2=\frac{80-100\cdot 0{,}75}{10\sqrt{3}}\cdot 4=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1{,}155.$$

Сонда $P_{100}(70{,}80)\approx \Phi(1{,}155)-\Phi(-0{,}9238)\approx 0{,}6982$

б) $\kappa_1=0$; $\kappa_2=70$; $n=100$; $p=0{,}75$; $q=0{,}25$

$$x_1=\frac{0-75}{10\sqrt{3}}\cdot 4\approx -18,\qquad x_2=-1{,}155.$$

$P_{100}(0{,}70)\approx \Phi(-1{,}155)+0{,}5\approx 0{,}124$.

2. Бұл жерде (1.4.10) формуланы қолданамыз:

$n=400$, $p=0{,}75$, $q=0{,}25$, $\varepsilon=0{,}035$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=0{,}035\cdot\frac{20\cdot 4}{\sqrt{3}}\approx 1{,}62$$

Сонда: $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}75\right|<0{,}035\right)\approx 2\Phi(1{,}62)\approx 0{,}895$.

3. Есептің шарты бойынша:

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}75\right|<0{,}035\right)=0{,}95\ ,$$

яғни $2\Phi\left(0{,}035\sqrt{\frac{n}{0{,}75\cdot 0{,}25}}\right)=0{,}95$.

Сонда кестеден:

$$0{,}035\sqrt{\frac{n}{0{,}75\cdot 0{,}25}}=1{,}96$$

немесе $\sqrt{n}=1{,}96\sqrt{3}\,/\,0{,}14$, осыдан n=588.

4. Ең ықтималды m_0 санын (1.4.2) теңсіздігінен анықтаймыз, яғни

$100\cdot 0{,}75-0{,}25\leq m_0\leq 100\cdot 0{,}75+0{,}75$

немесе $74{,}75\leq m_0\leq 75{,}75$.

Осыдан $m_0=75$.

4-мысал. Тұқымға арналған бидайдың дәндерінің ішінде 0,004% арамшөп дәндері кездеседі. Алынған 50 000 дәннің ішінде арамшөптің 5 дәні кездесетіндігінің ықтималдығы қандай?

Шешуі: Бұл есепті шығару үшін Муавр–Лапластың локалдік формуласын пайдалануға болар еді. Алайда есептің шарты бойынша p=0,00004, яғни ықтималдықтың мәні өте аз. Бұл жағдайда Муавр-Лапластың формуласын теореманың шарты бойынша пайдалануға болмайды. Сондықтан Пуассон (1.4.11) формуласын пайдаланамыз.

Есептің шарты бойынша:

$\lambda=np=50000\cdot 0{,}00004=2$

Сонда (1.4.11) формуласын қолданып:

$$P_{50000}(5)=\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx 0{,}036.$$

Ескерту. (1.4.11) формуланы пайдаланғанда $\lambda\leq 10$ болу керектігін ескеру қажет.

5-мысал. Ойнау шеберлігі бірдей екі шахматшы ойын көрсетуде. Үш ойында ең болмағанда бір ұтыс болуының ықтималдығын табу керек?

Шешуі: Бұл жерде (1.4.7) формуланы қолданамыз. Сонда p=0,5 екенін ескерсек: $P(A)=1-(0{,}5)^3=\frac{7}{8}$.

6-мысал. Урнада 5 ақ және 50 қара шар бар. Урнадан кез келген бір шар алынып оның түсін анықтағаннан кейін ол қайтадан урнаға салынды. Сөйтіп осы сынақ 10 рет қайталанды. Осы сынақтарда 3 рет ақ шар пайда болуының ықтималдығын анықтау керек.

Шешуі: Бернулли формуласын пайдалануға болады, себебі n=10 онша үлкен сан емес. Бұл жерде алынған шар урнаға қайтарылып тұрғандықтан әрбір сынақта ақ шардың пайда болу ықтималдығы тұрақты және p=5/55=1/11;

Сондықтан: $$P_{10}(3)=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{11}\right)^{3}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{7}\approx 0{,}047$$

Сондай-ақ жуықтап есептеу Пуассон формуласын пайдалансақ.

$$\lambda=np=10\cdot\frac{1}{10}\approx 0{,}9;$$

$$P_{10}(3)\approx\frac{0{,}9^{3}}{3!}e^{-0{,}9}\approx 0{,}051.$$

Бернулли схемасы жалпы жағдайда полиномдық схеманың жеке түрі болып табылады. Полиномдық схема бойынша тізбектес тәуелсіз сынақтардың әр сынағында өзара үйлесімсіз A_1, A_2,... $A_к$ оқиғалардың бірі A_i сәйкес p_i= $P(A_i)$ ықтималдықпен пайда болады.

Мұнда $0\le p_i\le 1$ және $\sum_{i=1}^{\kappa}p_i=1$.

Айталық n тәуелсіз сынақ жүргізілсін. Сонда осы n сынақтарда A_1 оқиғасының m_1 рет, A_2 оқиғасының m_2 рет, A_3 оқиғасының m_3 рет, ..., $A_к$ оқиғасының $m_к$ рет пайда болуының ықтималдығы мына полиномдық формуламен анықталады:

$$P_n(m_1,m_2,\ldots m_K)=\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_K!}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_K^{m_K}, \qquad (1.4.12)$$

мұндағы $m_1+m_2+\ldots+m_к=n$.

7-мысал. Жұмысшы 0,9 ықтималдығымен сапалы бұйым, 0,09 ықтималдығымен жөндеуге келетін ақауы бар, ал 0,01 ықтималдығымен жөндеуге келмейтін ақауы бар бұйымдар шығарады. Дайындалған үш бұйымның ішінде ең болмағанда бір сапалы бұйым және ең болмағанда ақауы жөндеуге келетін бір бұйым бар болатындығын тап.

Шешуі: Барлығы үш бұйым дайындалды. Белгілеу енгізелік. A – сапалы бұйым, B – ақауы жөндеуге келетін бұйым, C – ақауы жөндеуге келмейтін бұйым. Сонда бізге мына оқиғалардың пайда болғаны керек:

$A_1=A\cdot B\cdot C$,
$A_2=A\cdot A\cdot B$,
$A_3=A\cdot B\cdot B$.

Бұл A_1, A_2, A_3 оқиғалары үйлесімсіз. Есептің шартынан байқағанымыздай, бұл оқиғалар әртүрлі ықтималдықтармен пайда болады. Сондықтан есептің шарттары полиномдық формуланы пайдалануға болатынын көрсетеді. Сонда:

$$P=P_3(1,1,1)+P_3(2,1,0)+P_3(1,2,0)=$$

$$=\frac{3!}{1!1!1!}\cdot 0{,}9\cdot 0{,}09\cdot 0{,}01+\frac{3!}{2!1!}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}09+\frac{3!}{2!1!}\cdot 0{,}9\cdot 0{,}09^2=$$

$$=3(2\cdot 0{,}00081+0{,}0729+0{,}00729)=0{,}24543.$$

ЕСЕПТЕР

62. Тәуелсіз n сынақта оқиға тұрақты ықтималдықпен пайда болады.

1. n=1500 болғанда салыстырмалы жиіліктің p=0,4 ықтималдықтан ауытқуының абсолют шамасы 0,02-ден кем болатындығының ықтималдығын табу керек.

2. n=1500 және p=0,4 болғанда оқиғаның пайда болуының саны мына аралықтарда жататындығының ықтималдығын табу керек.

а) 570-тен 630-ға дейін;
б) 600-ден 660-қа дейін;
с) 620-дан 680-ге дейін;
г) 580-нен 640-қа дейін;

3. n=1200, p=2/3 болғанда салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан (p=2/3) ауытқуының абсолют шамасының ықтималдығы 0,985-ке тең болуы үшін салыстырмалы жиілік қандай аралықта жатуы керек?

4. Салыстырмалы жиіліктің ықтималдықтан (p=3/8) ауытқуының абсолют шамасының 0,01-ден кем болуының ықтималдығы 0,995-ке тең болуы үшін қанша тәуелсіз сынақтар жасау керек?

63. Автоматты станокта стандартты деталь дайындау ықтималдығы 0,9-ға тең. Алынған 5 детальдің үшеуі стандартты деталь болуының ықтималдығын табу керек.

64. Әрбір 16 тәуелсіз сынақта оқиға тұрақты 0,7 ықтималдықпен пайда болады. Ең ықтимал санды табу керек.

65. Әрбір атыста нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7-ге тең. 300 рет атқанда нысанаға 240 рет тигізудің ықтималдығы қандай?

66. Сапасыз деталь жасаудың ықтималдығы 0,02-ге тең. Жасалған 400 детальдың ішінде 7-ден 10-ға дейін сапасыз деталь болуының ықтималдығын табу керек.

67. Телефон станциясы қызметкерлерінің әрбір тапсырысты қабылдағанда қате жіберу ықтималдығы 0,009-ға тең. Станция 1000 тапсырыс қабылдады. Осының ішінде 9 тапсырысты қате қабылдауының ықтималдығы қандай?

68. Зауыт дайындайтын бұйымдардың 60%-тің бірінші сортпен шығарады. Қабылдаушы 200 дайын бұйымды қабылдап алды. Осы 200 бұйымның ішінде 120-дан 150-ге дейін бірінші сортты бұйымдар болатындығының ықтималдығы қандай?

69. Урнаға бірдей бір қара, бір қызыл және бір ақ шар салынған. Урнадан бір шар алынып, оны қайта урнаға салып тәжірибені бес рет қайталайды. Сонда қара шар мен ақ шардың кем дегенде екі рет алынғандығының ықтималдығын тап.

70. Нысана ішкі бір дөңгелек және екі концентрлі сақинадан тұрады. Осы нысанаға 10 оқ атылды. Әрбір ату кезінде аталған облыстарға тию ықтималдықтары сәйкес 1/15, 1/2 және 1/7 тең. 10 рет атқанда ішкі дөңгелекке үш оқ, бірінші сақинаға 6 оқ және екінші сақинаға 1 оқ тиетіндігінің ықтималдығын тап.

71. Лотереяда бір билетке ұтыс шығуының ықтималдығы 0,3-ке тең болса, алынған 10 билеттің ішінде ұтыс шығуының ең ықтимал саны қандай?

72. Тәуелсіз сынақтарда оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,5-ке тең. 196 сынақта оқиғаның 100 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

73. Теңгені 5 рет лақтырғанда елтаңбаның кем дегенде 2 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

74. Белгілі бір оқиғаның 300 тәуелсіз сынақтарда пайда болу ықтималдығы 0,6-ға тең. Оқиғаның пайда болуы 250 реттен аспайтындығының ықтималдығын табу керек.

75. Егер әрбір ағаштың өсіп шығуының ықтималдығы 0,8-ге тең екендігі белгілі болса, онда отырғызылған 400 ағаштан 104 ағаштың өсіп шықпайтындығының ықтималдығы қандай болады?

76. Урнада 100 ақ, 80 қара шар бар. Урнадан кез келген шар алып, түсін анықтап қайта салады. Ақ шар шығуының ең ықтимал саны 11-ге тең болу үшін қанша сынақ жүргізу керек?

77. Фабрика жасап шығарған бұйымдардың 25 %-і сапасыз болатындығы белгілі еді. Тексеруге кез келген 8 бұйым алынды. Осы сегіз бұйымның алтауының сапасыз болуының ықтималдығы қандай?

78. Белгілі бір оқиға 25 тәуелсіз сынақта 0,7 ықтималдықпен пайда болады. Оқиғаның пайда болуының ең ықтимал санын табу керек.

79. Гаражда 5 машина бар. Кез келген бір сәтте машиналардың жұмыс істеу ықтималдығы 0,8-ге тең. Қалаған бір сәтте үш машинаның жұмыс істеуінің ықтималдығы қандай?

80. Егер алынған кез келген детальдің жарамсыз болуының ықтималдығы 0,1-ге тең екендігі белгілі болса, онда жарамды детальдардың пайда болуының ең ықтимал саны 50-ге тең болуы үшін қанша деталь алу керек?

81. Оқиғаның 144 тәуелсіз сынақтарда пайда болу ықтималдығы 0,8-ге тең. Осы сынақтарда оқиғаның 120 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

82. Жанұяда 7 баланың төртеуі ұл және үшеуі қыз екендігінің ықтималдығы қандай?

83. Цехтағы 6 мотордың бірінің белгілі бір сәтте жұмыс істеп тұру ықтималдығы 0,8-ге тең. Осы сәтте 4 мотордың жұмыс істеу ықтималдығын табу керек.

II тарау. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Айталық элементарлық оқиғалар кеңістігі $\Omega = \{\omega\}$ берілсін. Егер осы кеңістікте анықталған $X(\omega)$ функциясы сандық мәндер қабылдап, кез келген x үшін мына ықтималдық

$$P(X<x)=P\{\omega: X(\omega)<x\}$$

анықталған болса, онда $X\{\omega\}$ функциясын кездейсоқ шама деп атайды.

Кездейсоқ шамалар мен кездейсоқ оқиғаларды бір-бірінен ажырата білген жөн. Анықтамадан байқап отырғанымыздай кездейсоқ шама міндетті түрде пайда болады, тек оның қандай мәнді қабылдайтыны алдын ала белгісіз. Ал кездейсоқ оқиғаның пайда болуының өзі кездейсоқ жай.

Мысалы, теңге лақтыру тәжірибесін қарастырайық. Осы тәжірибеде кездейсоқ оқиға деп елтаңбаның немесе цифрдің пайда болуын айтамыз, ал кездейсоқ шама ретінде тәжірибе нәтижесінде елтаңбаның пайда болу санын қарастыруға болады. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері 0, 1, 2 ...,n, яғни тәжірибе нәтижесінде елтаңба мүлде пайда болмауы мүмкін, немесе 1 рет, 2 рет, ..., n рет пайда болуы мүмкін. Кездейсоқ шамалар дискретті және үзіліссіз болып бөлінеді.

Кездейсоқ шамаларға мысалдар келтірейік:

1. Тәуелсіз n сынақтарда тұрақты ықтималдықпен А оқиғасының пайда болу саны.
2. Бір цех өнімдерінің ішіндегі сапасыз бұйымдар саны.
3. Снарядтың ұшу алыстығы.
4. Телефон станциясына белгілі бір уақыт мерзімінде келіп түскен тапсырыстар саны, т.б.

Осы мысалдардан көріп отырғанымыздай кездейсоқ шама тәжірибенің кездейсоқ нәтижесінің сандық сипаттамасы екенін байқаймыз.

§ 1. Дискретті кездейсоқ шамалар

Анықтама. Кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндерінің саны ақырлы болса немесе тізбек түрінде жазылса, онда ондай кездейсоқ шамаларды *дискретті кездейсоқ шамалар* деп атайды.

Дискретті кездейсоқ шаманы анықтау үшін үлестірім қатары – үлестірім кестесі құрылады.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Кестенің жоғары жолында кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері, ал төменгі жолында сол мәндердің сәйкес ықтималдықтары келтірілген.

Мұнда $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

1.1. Үлестірім заңдары

1. БИНОМДЫҚ ҮЛЕСТІРІМ

Егер мүмкін мәндері 0,1,2,..., k, ... болып, ал осы мүмкін мәндерді қабылдау $X=k$ ықтималдықтары Бернулли формуласымен анықталса

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (2.1.1)$$

онда кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген деп аталады.

Сонымен биномдық үлестірім заңдылығымен берілген дискретті кездейсоқ шаманы – тұрақты ықтималдықты А оқиғасының n тәуелсіз сынақтарда пайда болуының саны ретінде қарастыруға болады.

2. ПУАССОН ҮЛЕСТІРІМІ

Егер тәуелсіз сынақтарда *n* үлкен сан болса және *p*-ның шамасы аз болса, онда кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарын Пуассон формуласымен

$$P(X=x)=P_{n}(\kappa)\approx\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda=np \tag{2.1.2}$$

есептеу керек.

Бұл жағдайда кездейсоқ шама Пуассондық үлестірім заңымен берілген дейді. Бернулли схемасына негізделген тағы да басқа үлестірімдерді келтірелік.

3. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ҮЛЕСТІРІМ

Айталық тәуелсіз сынақтарда Бернулли схемасы қарастырылсын, мұнда $P(A)=p$. Сонда қатарынан $(\kappa-1)$ рет $\overline{A}$ оқиғасы пайда болып, ал κ-шы ретте А оқиғасының пайда болу ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$Г(\kappa,p)=(1-p)^{\kappa-1}p. \tag{2.1.3}$$

Ықтималдығы осы формуламен анықталған $(\kappa=1,2,3...,n)$ кездейсоқ шаманы геометриялық үлестірімімен берілген дейді.

4. ПАСКАЛЬ ҮЛЕСТІРІМІ

Тәуелсіз сынақтарда $\overline{A}$ оқиғасы қатарынан $\kappa-1$ рет пайда болып, сосын А оқиғасы *m* рет пайда болуының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$П(\kappa,\mathrm{p},m)=C_{\kappa+m-2}^{\kappa-1}(1-p)^{\kappa-1}p^{m}. \tag{2.1.4}$$

Ықтималдығы осы формуламен анықталған кездейсоқ шама Паскаль үлестірімімен берілген дейді. Геометриялық үлестірім Паскаль үлестірімінің жеке жағдайы, яғни $m=1$ болғанда геометриялық үлестірімді аламыз.

5. ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ҮЛЕСТІРІМ

Егер X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері 0,1,2,3,...$к$ болып, ал сәйкес ықтималдықтары мына формуламен

$$p = C_n^{к} C_{N-n}^{m-к} / C_N^m \qquad (2.1.5)$$

анықталса, онда кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестіріммен берілген дейді.

1-мысал. Жәшікте барлығы 10 шар бар, олардың 7-і қара, 3-і көк. Жәшіктен кез келген 5 шар алынды. Сол 5 шардың үшеуі қара болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: Осындай мазмұнды есепті классикалық анықтаманы және комбинаторикадағы қосу және көбейту ережелерін пайдаланып шығаруға болады. Бұл есепті осы тәсілмен шығарса: $P = C_7^3 \cdot C_3^2 / C_{10}^5$.

Енді осы есепті жалпы түрде келтірейік.

2-мысал. Жәшікте барлығы N шар бар, оның *ішіндегі* n қара шар бар, ал ($N-n$) көк шарлар. Жәшіктен кез келген m шар алынды. Сол алынған m шардың ішінде $к$ қара шар болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: x – жәшіктен алынған шарлар саны. Бұл кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері 0, 1, 2, ..., m.

Жәшіктегі N шардан m шарды әртүрлі C_N^m жолмен алуға болады, ал n қара шарлардан $к$ шарды әртүрлі C_n^k жолмен аламыз, сонда алынған m шардың ішінде $m-к$ көк шарлар болғандықтан барлық $N-n$ көк шарлардан $m-к$ көк шарды C_{N-n}^{m-k} жолмен алуға болады. Сонымен жәшіктен алынған шардың $к$ қара шарын C_n^k жолмен, ал қалған $m-к$ көк шарды C_{N-n}^{m-k} жолмен алуға болады екен. Олай болса комбинаторикадағы көбейту ережесін қолдансақ, алынған m шардың ішінде $к$ қара шар, m-$к$ көк шар болуы $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$ жолмен анықталады.

Сонда ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P = \frac{C_n^{к} \cdot C_{N-n}^{m-к}}{C_N^m} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5}$$

болады.

Сөйтіп X – кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестіріммен берілгеніне көз жеткіздік.

1.2. Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

Дискретті кездейсоқ шаманың *математикалық үміті* деп оның мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысын айтады:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (2.1.6)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың *дисперсиясы* деп оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының квадратының математикалық үмітін айтады:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x_i))^2\cdot p_i \qquad (2.1.7)$$

Дисперсияны есептеудің жеңілдетілген формуласы:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i p_i)^2 \qquad (2.1.8)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы мына формуламен есептелінеді:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$$

Дискретті кездейсоқ шаманың бастапқы κ-ретті моменті деп осы кездейсоқ шаманың κ-шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады:

$$\upsilon_k(X)=M(X^k)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i \qquad (2.1.9)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың κ-ретті орталық моменті деп, оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының к-шы дәрежесінің математикалық үмітін айтады:

$$\mu_k(X)=M[X-M(X)]^k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x_i))^k\cdot p_i \qquad (2.1.10)$$

Кездейсоқ шаманың математикалық үміті бірінші бастапқы моментіне, ал дисперсиясы – екінші орталық моментіне тең:

$$M(X)=\upsilon_1(X), \quad D(X)=\mu_2(X)$$

Сондай-ақ екінші, үшінші және төртінші орталық моменттер бастапқы моменттер арқылы төмендегідей өрнектеледі:

$$\mu_2=\upsilon_2-\vartheta_1^2,\ \mu_3=\upsilon_3-3\upsilon_1\upsilon_2+2\upsilon_1^3,$$

$$\mu^4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4. \qquad (2.1.11)$$

Дискретті кездейсоқ шаманың ең ықтималды мәнін оның *Модасы* (M_0) деп атайды.

Айталық кездейсоқ шаманың *n* мүмкін мәндері болсын.

$P(X<M_D)=P(X>M_D)$

теңдігі орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың *медианасы* деп аталады.

Егер n=2κ болса, онда $M_D=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})$, егерде n=2κ+1 болса,

онда $M_D=x_{k+1}$.

Сондай-ақ қарастырылып отырған кездейсоқ шаманың үлестірім заңын қалыпты үлестіріммен салыстыру үшін E_k эксцесс және A асимметрия сипаттамалары қарастырылады. Мұнда:

$$E_k=\frac{\mu_4}{\sigma_4}-3,\ A_s=\frac{\mu_3}{\sigma_3}.$$

Ескерту: қалыпты үлестірім үшін $E_k=0$, $A_s=0$.

Математикалық үміттің қасиеттері:

1. $M(c)=c$.
2. $M(cX)=cM(X)$.
3. $M(X\pm У)=M(X)\pm M(У)$.
4. $M(XУ)=M(X)\cdot M(У)$.

Дисперсияның қасиеттері:

1. $D(X)\geq 0$.
2. $D(c)=0$
3. $D(cX)=c^2D(X)$.
4. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

Мұндағы *X* және *У* тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Жоғарыда келтірілген үлестірім заңдарының математикалық үміттері мен дисперсияларын келтірелік.

1. Биномдық үлестірім:

$$M(X) = np,\ D(X) = npq, \qquad A_s = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \quad E_k = \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}.$$

2. Пуассон үлестірімі:

$$M(X) = \lambda,\ D(X) = \lambda,\ A_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},\ \ E_k = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Геометриялық үлестірім:

$$M(X) = \frac{1}{p},\ \ D(X) = \frac{1-p}{p} \tag{2.1.12}$$

4. Паскаль үлестірімі:

$$M(X) = \frac{m}{p}\ ,\ D(X) = \frac{m(1-p)}{p^2}$$

5. Гипергеометриялық үлестірім:

$$M(X) = np, \quad D(X) = \frac{N-n}{N-1}npq.$$

Мұнда n < 0,1ЧN болғанда $D(X)$]ңnpq болады, яғни биномдық үлестірімнің дисперсиясына жуықтап тең болады.

Сондықтан $n < 0{,}1 \cdot N$ болғанда

$$\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} \approx C_m^k p^k q^{m-k}$$

болады. Осы жағдайда $p \approx \dfrac{n}{N}$ болады.

3-мысал. Дискретті кездейсоқ шама мына үлестіріммен берілсін:

X	−1	0	1	2
p	0,2	0,4	0,2	0,2

Сандық сипаттамаларын тап.

Шешуі :

$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$

Дисперсияны (2.1.8) формуласын қолданып табамыз. Ол үшін әуелі

X^2	1	0	1	4
p	0,2	0,4	0,2	0,2

жазамыз. Сонда:

$$D(X)=(1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}2)-(0{,}4)^2=1{,}04.$$

M_0=0. Себебі кездейсоқ шаманың X=0 мәні ең үлкен ықтималдықпен қабылданады. Енді M_D табу үшін $n = 4$ екенін ескеріп

$M_D=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ аламыз.

Сондай-ақ жоғарыда келтірілген (2.1.9)–(2.1.11) формулаларын пайдаланып

$$\begin{array}{lll} \nu_1=M(X)=0{,}4 & \mu_2=D(X)=1{,}04 & \\ \nu_2=1{,}2 & \mu_3=0{,}288 & \\ \nu_3=1{,}6 & \mu_4=2{,}1152 & \\ \nu_4=3{,}6 & A_S=0{,}274 & E_k=-1{,}023 \end{array}$$

табамыз. Мұнда $A_s > 0$, олай болса дифференциалдық функцияның графигі оң жаққа "созыңқы", ал $E_k < 0$ болғандықтан бұл график Гаусс қисығына қарағанда "жатыңқы".

Егер бірдей үлестіріммен анықталған n өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалар X_1 , X_2 , ..., X_n берілсе және

$$M(X_1)=M(X_2)=...=M(X_n)=a, \quad D(X_1)=D(X_2)=...=D(X_n)=\sigma^2$$

болса, онда бұл кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасы да кездейсоқ шама болады, яғни

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}.$$

Бұл арифметикалық орташаның математикалық үмітін табалық

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}(M(X_1)+...+M(X_n))=a$$

яғни $M(\overline{X})=a$.

Енді дисперсиясын табамыз:

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}(D(X_1)+...+D(X_n))=\frac{\sigma^2}{n},$$

яғни $D(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$. (2.1.13)

Сонымен (2.1.13) формуладан бірнеше өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасының дисперсиясы берілген кездейсоқ шамалардың дисперсиясынан едәуір кем екендігі көрінеді. Сондықтан өмірде керекті параметрді анықтау кезінде жүргізілген қайталанбалы өлшеулерде дисперсияның осы қасиетін пайдаланады. Сөйтіп іздеп отырған параметрдің мәні ретінде қайталанған өлшеулер кезінде алынған мәндердің арифметикалық орташа мәнін алады.

4-мысал. Теңге үш рет лақтырылсын. Кездейсоқ шама X ретінде елтаңбаның пайда болу санын қарастырамыз.

1. Үлестірім қатарын жазу керек.
2. Үлестірім көпбұрышын салу керек.
3. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ − тарды табу керек.

Шешуі: Бұл кездейсоқ шама X-тің мүмкін мәндері − 0, 1, 2, 3. Себебі теңгені үш рет лақтырғанда елтаңба не пайда болмауы мүмкін, не бір рет пайда болуы мүмкін т.с.с. Ал әрбір лақтырғанда елтаңбаның пайда болу ықтималдығы 0,5-ке тең. Олай дейтініміз теңге лақтырғанда негізінен не елтаңба, не цифр пайда болады, ал теңгенің симметриялығын ескерсек бұл екеуінің пайда болу ықтималдығы бірдей. Сондықтан бұл кездейсоқ шама X-ті биномдық үлестірім заңымен сипаттауға болады.

Үлестірім қатарын жазайық:

X	0	1	2	3
p	$C_3^0 p^0 q^3$	$C_3^1 p^1 q^2$	$C_3^2 p^2 q$	$C_3^3 p^3 q^0$

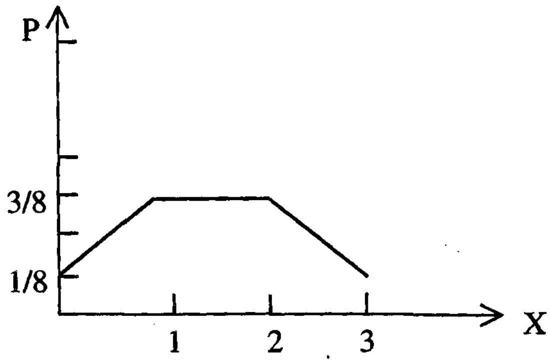
немесе

X	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

Бұл жерде $\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$ орындалады.

2. Үлестірім көпбұрышын салайық.
3. Математикалық үмітті (2.1.6) формуламен есептейміз:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$



Ал дисперсияны әдетте жеңілдетілген (2.1.8) формуламен есептейді. Ол үшін x^2 кездейсоқ шаманың үлестірім қатарын жазып алу керек.

X^2	0	1	4	9
p	1/8	3/8	3/8	1/8

Сонда:

$$M(X^2) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 9\cdot\frac{1}{8} = 3,$$

$$D(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Сондай-ақ бұл мысалдағы кездейсоқ шаманың биномдық үлестіріммен берілгенін ескерсек, онда сандық сипаттамаларды (2.1.12) формулаларын пайдаланып та есептеуге болады:

$$M(X) = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \qquad D(X) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

5-мысал. Шығарылған бір партия бұйымның 10 проценті сапасыз. Кез келген 4 бұйым алынды. Осы төрт бұйымның ішінде сапасыз бұйымдардың пайда болу санының үлестірім заңын жазып, сандық сипаттамаларын есептеу керек.

Шешуі: X — сапасыз бұйымдардың пайда болуының саны. Әрбір сапасыз бұйымның пайда болу ықтималдығы 0,1-ге тең, себебі берілген партияның 10 проценті сапасыз бұйымдар. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген. Мұнда

$n = 4$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$.

Сонда:

X	0	1	2	3	4
p	$C_4^0 p^0 q^4$	$C_4^1 p^1 q^3$	$C_4^2 p^2 q^2$	$C_4^3 p^3 q$	$C_4^4 p^4 q^0$

немесе,

X	0	1	2	3	4
p	0,6581	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Енді математикалық сипаттамаларын табайық: $M(X) = 4{\cdot}0{,}1 = 0{,}4$, $D(X) = 4{\cdot}0{,}1{\cdot}0{,}9 = 0{,}36$, $\sigma(X) = 0{,}6$.

6-мысал. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім қатарымен берілген

X	2	4	5	6	8
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$-тарды табу керек.

Шешуі : Мұнда $M(X)=5{,}5$.

Енді $D(X)$-ті есептеу үшін мына X^2 шаманың үлестірім кестесін құрамыз

X^2	4	16	25	36	64
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Сонда $M(X^2) = 33{,}9$ $D(X) = 3{,}65$ $\sigma(X) = 1{,}91$ аламыз.

7-мысал. Урнада 5 ақ және 50 қара шар бар. Урнадан кез келген шар алынып түсі анықталғаннан кейін урнаға қайта салынды. Кездейсоқ шама X тәуелсіз 10 сынақта ақ шар пайда болу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңыз.

Шешуі: Бұл мысалда сынақ кезінде ақ шар пайда болу ықтималдығы $p=5/55=1/11$. Сынақ саны $n=10$. Олай болса қарастырып отырған кездейсоқ шаманы биномдық заңмен берсек, онда үлкен арифметикалық есептеулерге кезігеміз. Сондықтан бұл кездейсоқ шаманы Пуассон үлестірім заңымен беруге болады. Сөйтіп, кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері: 0, 1, 2, ... 10.

Ал кездейсоқ шаманың мүмкін мәндерінің сәйкес ықтималдықтары

$$P_{10}(k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{10}{11}\right)^k e^{-\frac{10}{11}}, \qquad к = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 10.$$

Жеке жағдайда $к=3$ болса, биномдық үлестірім бойынша:

$$P_{10}(3) \approx C_{10}^{3}\left(\frac{1}{11}\right)^{3}\left(\frac{10}{11}\right)^{7} \approx 0{,}047.$$

Пуассондық үлестірім бойынша:

$$P_{10}(3) \approx \frac{1}{3!}\left(\frac{10}{11}\right)^{3} e^{-\frac{10}{11}} \approx 0{,}051.$$

8-мысал. Екі атқыш әрқайсысы өз нысанасына бір-бірден оқ атты. Бірінші атқыш үшін нысанаға тигізудің ықтималдығы p_1, ал екінші атқыш үшін p_2. Кездейсоқ шамалар X_1 — бірінші атқыштың нысанаға тигізу саны, X_2 — екінші атқыштың нысанаға тигізу саны, ал $Z = X_1 - X_2$ — екі кездейсоқ шамалардың айырымы. Оның математикалық сипаттамаларын: $M(z)$, $D(z)$ — тарды табамыз.

Шешуі: Әуелі кездейсоқ шамалардың үлестірім кестелерін жазамыз:

X_1	0	1
p	q_1	p_1

X_2	0	1
p	q_2	p_2

Осыдан:

$$M(Z) = M(X_1) - M(X_2) = p_1 - p_2, \quad D(X_1) = p_1 q_1,$$

$$D(X_2) = p_2 q_2, \quad D(Z) = p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

9-мысал. Екі тәуелсіз кездейсоқ шамалар X және $У$ үлестірім кестелермен берілген:

X	0	3	4
p	0,2	0,6	0,2

$У$	2	3
p	0,3	0,7

$X+У$, $X \cdot Y$ — кездейсоқ шамалардың математикалық үміттері мен дисперсияларын тап.

Шешуі: Кестелерден әуелі

$M(X) = 2{,}6$, $M(У) = 2{,}7$, $D(X) = 1{,}84$, $D(У) = 0{,}21$ табамыз. Сосын X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамалар екендігін пайдаланып

$M(X + У) = 2{,}6 + 2{,}7 = 5{,}3$ $D(X + У) = 1{,}84 + 0{,}21 = 2{,}05$

$M(X \cdot У) = 2{,}6 \cdot 2{,}7 = 7{,}02$ табамыз.

10-мысал. "Спортлото" ойынын ойнағанда белгілі бір ұтысқа шығатын спорттың түрлерін дәл табудың ықтималдығын тап.

Шешуі: Мұндағы X — ұтысқа шыққан спорттың түрлерінің саны. Бұл кездейсоқ шама гипергеометриялық үлестірім заңымен берілген. Мұнда $N = 49$, $m = 6$, $n = 6$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ойынның шарты бойынша ұтыс үш спорттың түрін дәл тапқаннан бастап төленеді. Сондықтан біз $к = 3, 4, 5, 6$ жағдайларын қарастырып, сәйкес ықтималдықтарды табалық:

$$k=3,\quad P=\frac{C_6^3\cdot C_{43}^3}{C_{49}^6},\quad k=4,\quad P=\frac{C_6^4\cdot C_{43}^2}{C_{49}^6},$$

$$k=5,\quad P=\frac{C_6^5\cdot C_{43}^1}{C_{49}^6},\quad k=6,\quad P=\frac{C_6^6\cdot C_{43}^0}{C_{49}^6}.$$

Сол сияқты $к = 5$ және $к = 6$ болғанда сәйкес ықтималдықтар: p ң1,84 Ч10^{-5} және p = 7,15 Ч 10^{-8}.

11-мысал. Айталық 12 бұйымның 8-і бірінші сортқа жатады. Кез келген 5 бұйым алынды. Сонда осы 5 бұйымның ішінде бірінші сортты бұйымдардың болуының үлестірім кестесін құрыңыз.

Шешуі: Есептің шарты бойынша N=12 , m=5 , n=8. Кездейсоқ шама – X. Оның мүмкін мәндері: 1, 2, 3, 4, 5. Мұнда мүмкін мәндер бірден басталуының себебі: 5 бұйымның ішінде кем дегенде бір бұйым бірінші сортқа жатады.

Сонда:

$$P(X=k)=\frac{C_8^k\cdot C_4^{5-k}}{C_{12}^5}=\frac{C_8^k\cdot C_4^{5-k}}{210}$$

Енді үлестірім кестесін жазалық:

X	1		2	3	4 5
P	0,0101	0,1414	0,4242	0,3535	0,0707

ЕСЕПТЕР

84. Екі ойын сүйегін (ойын кубын) бір мезгілде екі рет лақтырады. Осы тәжірибеде X – екі ойын сүйегінде бір мезгілде жұп цифрдің пайда болу санының биномдық үлестірім заңын жазып және *M(X), D(X)*, $\sigma(X)$-ті табу керек.

Нұсқау. Әрбір ойын сүйегінде жұп санның пайда болу ықтималдығы $p_1 = p_2 = 3/6 = 1/2$. Ал екі ойын сүйегінде бір мезгілде жұп цифр пайда болуының ықтималдығы $p = p_1 \cdot p_2 = 0{,}25$

85. Бір ғана тәжірибе жүргізіледі. Нәтижесінде A оқиғасы пайда болады, не пайда болмайды. A оқиғасының пайда болу ықтималдығы – p. Кездейсоқ шама X – A оқиғасының осы тәжірибедегі пайда болу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңыз.

86. Екі атқыш нысанаға бір-бірден атыс жасады. Нысанаға тигізу ықтималдығы бірінші атқыш үшін 0,6, ал екіншісінікі – 0,8. Кездейсоқ шама X – нысанаға тигізудің саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім кестесін құрыңыз.

87. Тәуелсіз үш тәжірибе жүргізілген, осылардың әрқайсысында A оқиғасы $p = 0{,}4$ ықтималдығымен пайда бола алады. X – үш тәуелсіз тәжірибелерде A оқиғасының пайда болу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңыз.

88. Тиын елтаңба пайда болғанша лақтырылады. Лақтырыс санының үлестірім кестесін жазыңыз.

89. Тиын n рет лақтырылды. X – пайда болған елтаңба саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім кестесін жазыңыз, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ – табыңыз.

90. Екі ойын сүйегін лақтырғанда пайда болатын сандардың қосындыларының үлестірім кестесін жазыңыз.

91. Әрқайсысында A оқиғасы тұрақты P ықтималдығымен пайда болатын тәуелсіз n тәжірибе жүргізіледі. X –A оқиғасының пайда болу саны. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңыз, $M(X)$, $D(X)$ – табыңыз.

92. Урнада 2 ақ, 3 қара шар бар. Урнадан бірінен соң бірі екі шар бірдей түсті болғанша алынады, алынған шар түсін анықтағасын қайтарылып отырады. X – урнадан шар алудың саны, осы кездейсоқ шаманың үлестірім кестесін жазыңыз.

93. Әрқайсысында тұрақты p ықтималдығымен A оқиғасы пайда болатын n тәуелсіз тәжірибелер жүргізіледі. X–A оқиғасының пайда болу жиілігі. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім кестесін құрыңыз.

94. Нысанаға тигізу ықтималдығы 2/3 тең. Үш атыс жасағанда нысанаға тию санының үлестірім кестесін құрыңыз.

95. Нысанаға тигізу ықтималдығы – p. Тәуелсіз екі атыс жасалды. X – нысанаға тиген оқ пен тимеген оқтың сандарының айырымы. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім кестесін құрыңыз.

96. Ойын кубы үш рет лақтырылған. Алты цифрының пайда болу санының үлестірім кестесін жазыңыз.

97. Кездейсоқ шама X а санына көбейтілген. Сонда оның математикалық сипаттамалары қалай өзгереді?

98. Жарық беретін торапқа 4 электр шамы қосылған. Әрбір электр шамының бір ай ішінде жанып кету ықтималдығы 0,2. X – бір ай ішінде жанып кеткен электр шамдарының саны. Үлестірім кестесін жазыңыз.

99. Кездейсоқ шама үлестірім қатарымен берілген:

X	3	7	10	11
P	0,4	0,1	0,2	0,3

M(X); D(X), σ(X)-ті табыңыз.

100. Кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

X	- 2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

$M(X)$, $D(X)$, $\nu_2(X)$, $\mu_3(X)$ – табыңыз.

101. Кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген. Бастапқы $\nu_1(X)$, $\nu_2(X)$, $\nu_3(X)$ және орталық $\mu_3(X)$ моменттерді табыңыз.

X	- 2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

102. Екі кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары берілген:

X	1	3
P	0,4	0,6

У	2	4
P	0,2	0,8

X+Y кездейсоқ шаманың математикалық үмітін табыңыз.

103. Екі тәуелсіз X және Y кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдары берілген:

X	1	4
P	0,6	0,4

Y	0,5	2
P	0,8	0,2

Қосындының X+Y дисперсиясын табыңыз.

104. Кездейсоқ шаманың үлестірім кестесі келтірілген:

X	1	2	3	4
P	0,2	0,3	0,4	0,1

I, II, III және IV ретті орталық моменттерді табыңыз.

105. Тәуелсіз дискретті кездейсоқ шамалар X және Y үлестірім заңдарымен берілген:

X	1	2
P	0,2	0,8

Y	0,5	1
P	0,3	0,7

Математикалық үміт M(X·Y) – табыңыз.

106. Тәуелсіз екі кездейсоқ шамалар X және Y үлестірім кестелерімен берілген:

X	4	6
P	0,4	0,6

Y	1	2	4
P	0,3	0,4	0,3

Мына $Z=X\cdot Y$ кездейсоқ шаманың математикалық үмітін табыңыз.

107. Радиоаппаратура 1000 элементтен тұрады. Бір жылдың ішінде бір элементтің істен шығу ықтималдығы 0,001 және ол басқа элементтерден тәуелсіз. 1. Тура екі элементтің істен шығу ықтималдығын табыңыз. 2. Кем дегенде екі элементтің істен шығу ықтималдығын табыңыз.

Нұсқау: n үлкен, p кіші болғандықтан Пуассон заңын пайдалану керек.

108. Коммутаторға телефон соғу ықтималдығы бір сағат ішінде 0,01-ге тең. Телефон станциясына 300 абонент бекітілген. Бір сағат ішінде 4 абоненттің коммутаторға телефон соғуының ықтималдығы қандай?

109. Зауытта дайын бұйымның бақылаудан өтпеуінің ықтималдығы 0,001. Бақылауға түскен 5000 бұйымның ішінде бақылаудан өтпей қалған бұйымдардың саны біреуден артық болмауының ықтималдығын табыңыз.

110. Фабрикадан келген бұйымдардың 1 проценті жарамсыз болды. Алынған кез келген 200 бұйымның ішінде жарамсыз бұйымдар саны үшеуден артық болуының ықтималдығын табыңыз.

111. Қоймада барлығы 25 бұйым бар. Оның 5 бұйымы сапасыз. Қоймадан кез келген 8 бұйым алынған. Алынған сегіз бұйымның ішінде 3 сапасыз бұйым болатындығының ықтималдығы қандай?

§ 2. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар

Анықтама. Егер кездейсоқ шама өзінің мүмкін мәндерін $[a, b]$ интервалында қабылдаса және бұл мәндерді нөмірлеуге болмаса, онда ол *үзіліссіз кездейсоқ* шама деп аталады.

Мысалы поездың кешігу уақыты, атылған оқтың ұшу алыстығы т.б. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері белгілі бір интервалды қамтып жатады.

Кездейсоқ шаманың үлестірім заңдылықтарын әртүрлі жолмен қарастыруға болады. Төменде X–кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері тиянақты x санынан кіші болу ықтималдығы қарастырылады.

Анықтама. Үлестірім функциясы деп X–кездейсоқ шамасының мәндері нақты *x* санынан кіші болу ықтималдығын айтады.

Үлестірім функциясы F(x) арқылы белгіленеді. Сонда анықтама бойынша:

$F(x)=P(X<x)$

Бұл функцияны сондай-ақ интегралдық үлестірім функциясы деп те атайды.

Негізгі қасиеттері:

1. $P(a \le X \le b)=F(b)-F(a)$
2. $F(x_2) \ge F(x_1),\ x_2 \ge x_1$ (2.2.1)
3. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$

Дискретті кездейсоқ шама үшін интегралдық үлестірім функция былай анықталады:

$$F(x]=P(X<x)=\sum_{x_i<x} p_i \qquad (2.2.2)$$

Мұндағы $x_1, x_2 \ldots ,x_n$ дискретті кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері, ал $p_1,p_2,\ldots,p_n$ сол мәндердің қабылдануының сәйкес ықтималдықтары. Мына (2.2.2) қосындысы тек $x_i < x$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x_i үшін олардың сәйкес ықтималдықтарының қосындысы болады; *x* берілген нақты сан.

Анықтама: Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дифференциалдық функциясы (үлестірім тығыздығы) деп үлестірім функциясының бірінші туындысын айтады.

Дифференциалдық функцияны f(*x*) деп белгілейді. Сонда анықтама бойынша:

$$f(x)=F'(x). \qquad (2.2.3)$$

Негізгі қасиеттері:

1. $f(x)\ge 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
3. $P(\alpha\le x\le\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
4. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

1-мысал. Айталық X – дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесі арқылы берілген болсын

X	0	1	3	3,5
P	0,1	0,4	0,2	0,3

X-тің үлестірім функциясын табыңыз.

Шешуі: Ол үшін (2.2.2) формуласын пайдаланамыз. Кестеден байқағанымыздай $x<0$ болса, онда X-тің қабылдайтын мүмкін мәндері жоқ. Ал $0 \le x < 1$ болғанда X-тің қабылдайтын бір мәні бар, ол – 0; енді $1 \le x < 3$ болса, онда X-тің қабылдайтын екі мәні бар, ол 0; 1; т.с.с. ақырында $x \ge 3,5$ болса, онда X өзінің барлық мүмкін мәндерін қабылдайды, олар – 0; 1; 3; 3,5.

Енді (2.2.2) формуласына түсінік берейік. Жоғарыда айтқанымыздай x<0 болса, онда есептің шарты бойынша 0-санының сол жағында берілген кездейсоқ шаманың ешбір мүмкін мәні жоқ, яғни кездейсоқ шаманың өзінің мүмкін мәндерінің біреуін қабылдауын оқиға екенін ескерсек, онда оның 0-санының сол жағынан мән қабылдауы мүмкін емес оқиға, олай болса:

$F(x) = P(X<0) = 0$

Енді $x<1$ болса,онда 1 санының сол жағында есептің шарты бойынша кездейсоқ шаманың бір мәні бар, ол 0 саны. Олай болса

$F(x)=P(x<1)=P(x=0)=0,1$

Сол сияқты x<3 болғанда, 3-санының сол жағында кездейсоқ шаманың екі мәні болады. Ол осы мәндердің біреуін қабылдауы мүмкін, яғни екі оқиғаның біреуі пайда болады дегеніміз. Сондай-ақ, бұл екі оқиға үйлесімсіз, сондықтан үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы туралы теореманы пайдаланып:

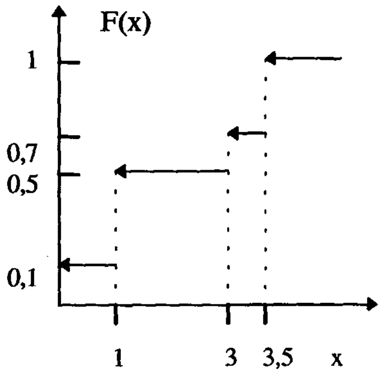
$F(x)=P(x<3)=P(x=0)+P(x=1)=0,1+0,4=0,5$

Осы жолмен x<3,5 және x>3,5 болғандағы F(x)-ның мәндерін есептеуге болады.

Сонымен қорытындысында:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0{,}1, & 0\le x<1 \\ 0{,}5, & 1\le x<3 \\ 0{,}7, & 3\le x<3{,}5 \\ 1, & x\ge 3{,}5 \end{cases}$$

Енді F(x) функциясының графигін тұрғызайық.



2-мысал. Кездейсоқ шама интегралдық функциямен берілген:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0{,}1, & -2\le x\le -1\\ 0{,}4, & -1\le x\le 1\\ 0{,}9, & 1\le x<2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Үлестірім кестесін құрыңыз, M(X), D(X), $\sigma(X)$ -табыңыз.

Шешуі: Интегралдық функцияның өрнегінен байқағанымыздай $x<-2$ болғанда F(x)=0, яғни − 2-нің сол жағында кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері жоқ. Ал x<-1 болғанда F(x)=0,1 бұл жағдайда кездейсоқ шаманың бір мүмкін мәні бар, ол − 2, сол сияқты x<1 болғанда F(x)=0,4, яғни 1 санының сол жағында кездейсоқ шаманың екі мүмкін мәні бар, олар − 2; 1.

Сондықтан F(x)=P(X=−2)+P(X=-1). Мұнда P(X=−1)=0,3.

Ойымызды осылай жалғастыра отырып ақырында мынадай үлестірім кестесін аламыз:

X	-2	-1	1	2
P	0,1	0,3	0,5	0,1

M(X)=0,2, D(X)=1,56, $\sigma(X)$=1,25.

ЕСЕПТЕР

112. Жоғарыда келтірілген 84 және 90 есептердегі қарастырған кездейсоқ шамалардың интегралдық функцияларын табыңыз. Математикалық сипаттамаларын есептеңіз.

113. Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген.

а) $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-4\\ 0{,}05, & -4\le x<-3\\ 0{,}15, & -3\le x<-2\\ 0{,}25, & -2\le x\le -1\\ 0{,}35, & -1\le x<0\\ 0{,}45, & 0\le x<1\\ 0{,}65, & 1\le x<2\\ 0{,}85, & 2\le x<3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

б) $$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ 0{,}4 & 1<x\le 2\\ 0{,}9 & 2<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

Үлестірім кестесін табыңыз.

114. Тиынды екі рет лақтырғанда елтаңбаның пайда болуының үлестірім кестесін жазыңыз. Интегралдық функциясын табыңыз.

2.1. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

1. Математикалық үміті:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{2.2.4}$$

2. Дисперсиясы:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[X-M(X)]^2 f(x)dx. \tag{2.2.5}$$

Жеңілдетілген формуласы:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2. \tag{2.2.6}$$

3. Орташа квадраттық ауытқуы:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \tag{2.2.7}$$

4. *K*-ретті бастапқы моменті:

$$v_K(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^K f(x)dx\,. \tag{2.2.8}$$

5. *K*-ретті орталық моменті:

$$\mu_K(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[X-M(X)]^K f(x)dx. \tag{2.2.9}$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың мүмкін мәндері жөнінде белгілі дәрежеде информация беретін басқа да сипаттамалар бар. Оларға мода, медиана, асимметрия, эксцесстер жатады.

Анықтама. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_0 мәнінде $f_{\max}=f(M_0)$ теңдігі орындалса, онда M_0 кездейсоқ шаманың *модасы* деп аталады.

Анықтама. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_D мәнінде $P(X<M_D)=P(X>M_D)$ орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың *медианасы* деп аталады.

Анықтама. Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үміті бойынша симметриядан ауытқуы, оның *асимметриясы* деп аталады және оны A_s деп белгілейді:

$$A_s=\mu_3/\sigma^3\,. \tag{2.2.10}$$

Мұнда μ_3 – үшінші ретті орталық момент, σ – орташа квадраттық ауытқуы.

Егер кездейсоқ шаманың үлестірімі математикалық үміті бойынша симметриялы болса, онда $A_s=0$. Егер $A_s>0$, онда дифференциалдық функцияның графигі оң жаққа қарай "созыңқы" болады, ал $A_s<0$, онда сол жаққа қарай "созыңқы" болады.

Анықтама. Қалыпты үлестіріммен салыстырғанда дифференциалдық функцияның графигінің "жатыңқылық" деңгейін анықтайтын шаманы *эксцесс* деп атайды және оны $E_к$ арқылы белгілейді:

$$E_к=\frac{\mu_4}{\sigma_4}-3\,. \tag{2.2.11}$$

Мұнда қалыпты үлестірім үшін $E_к = 0$. Егер $E_к > 0$, онда Гаусс қисығымен салыстырғанда график "көтеріңкі" болады, егер $E_к < 0$, онда график "жатыңқы" болады.

3-мысал. Үзіліссіз кездейсоқ шама дифференциалдық функциямен берілген

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

Кездейсоқ шаманың Mo, M_D, A_s, $E_к$-ларын табу керек.

Шешуі: 1. Моданы табу үшін f(x) функциясының максимумын табамыз. Ол үшін әуелі бірінші туындыны тауып оны нөлге теңеп, сосын кризистік нүктені тауып, f(x)-тің максимумын белгілі схема бойынша анықтаймыз:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x\,,\ f''(x)=-\frac{1}{2}\sin x\,,\ f'(x)=0\,,\ \cos x=0\,,\ x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi.$$

Мұнда $[0; \pi)$ кесіндісінде тек $x=\frac{\pi}{2}$ мәні жатады. Енді

$f''(\frac{\pi}{2}]=-\frac{1}{2}<0$. Осыдан $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Олай болса $Mo=\frac{\pi}{2}$.

Енді медиананы табалық. Анықтамадан:

$$P(0<X<M_D)=P(M_D<x<\pi)$$

Осыдан:

$$P(0<X<M_D)=\int_0^{M_D}\frac{1}{2}\sin x dx=-\frac{1}{2}(\cos M_D-\cos 0)=-\frac{1}{2}\cos M_D+\frac{1}{2}$$

Сондай-ақ,

$$P(M_D<x<\pi)=\int_{M_D}^{\pi}\frac{1}{2}\sin x dx=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos M_D)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos M_D$$

Осыдан $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos M_D=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos M_D, \qquad M_D=\frac{\pi}{2}$

Енді A_s және $E_к$-ларды табу үшін әуелі

$$\nu_1=\frac{\pi}{2},\ \nu_2=\frac{\pi^2-4}{2},\ \nu_3=\frac{\pi^3}{3}-3\pi,\ \nu_4=\frac{\pi^4}{2}-6\pi^2+24$$

табамыз.

Сонда:

$$\mu_2=\frac{\pi^2-8}{4},\ \mu_3=0,\ \mu_4=\frac{\pi^4+384-48\pi^2}{16}$$

Осы есептеулерді пайдаланып $A_s=0$ екенін көреміз, яғни f(x) функциясының графигі өзінің M(x)-і бойынша симметриялы орналасқан.

Сол сияқты $E_K=\dfrac{192-2\pi^4-32\pi^2}{(\pi^2-8)^2}<0$

екенін көреміз, яғни f(x)-тің графигі Гаусс қисығына қарағанда "жатыңқы" болады екен.

4-мысал. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{2x}{9}, & 0<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Интегралдық функциясын табыңыз.

Шешуі: Дифференциалдық функцияның төртінші қасиеті бойынша:

$$F(x]=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Осыдан $x\le 0$ болғанда f(x)=0 болатынын пайдалансақ:

$$F(x]=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$$

Енді $0<x\leq 3$ болғанда $f(x]=\dfrac{2x}{9}$ сондықтан:

$$F(x]=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\frac{2x}{9}dx=\frac{x^2}{9}$$

Ақырында $x>3$ болғанда $f(x)=0$ осыдан

$$F(x]=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{3}\frac{2x}{9}dx+\int_{3}^{x} 0dx=1$$

Сонымен:

$$F(x]=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\leq 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

5-мысал. Үзіліссіз кездейсоқ шама үлестірім функциясымен берілген:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\leq 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

1. Үлестірім тығыздығын табу керек.
2. $M(X)$, $D(X)$ табу керек.
3. Мына интервалдан $[\frac{1}{2},1]$ мән қабылдауының ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

1. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1/4, & 0<x\leq 4\\ 0, & x>4\end{cases}$$

2. $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{4} xdx+\int\limits_{4}^{+\infty} 0dx=2$

$D(X)=\int\limits_{0}^{4} x^2 f(x)dx-[M(x)]^2=\frac{4}{3}$

3. $P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)=\frac{1}{8}$

6-мысал. Кездейсоқ шама дифференциалдық функция арқылы берілген:

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x, & x\in[0,\pi/2] \\ 0, & x\bar{\in}[0,\pi/2] \end{cases}$$

Табу керек: *a*, F(*x*), M(*x*), D(*x*), P(0<*x*<π/4).

Шешуі: *a* коэффициентін табу үшін дифференциалдық функцияның қасиетін пайдаланамыз:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

Есептің шарты бойынша:

$$1=\int\limits_{0}^{\pi/2} a\sin xdx=-a\cos x|_0^{\pi/2}=a$$

Сонымен $a=1$.

Енді F(*x*)-ті табалық:

$x<0$ болса: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$ болса: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\sin xdx=1-\cos x,$

$x\ge\frac{\pi}{2}$ болса $F(x)=1,$

Сонымен:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-\cos x, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$$

Математикалық үмітті мына формула көмегімен есептейміз:

$$M(x]=\int_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\pi/2} x\sin x dx=(-x\cos x+\sin x)|_0^{\pi/2}=1$$

Дисперсияны есептейміз:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{-\infty} x^2 f(x)dx-[M(x)]^2=\int_{0}^{\pi/2} x^2\sin x dx-1=$$

$$=[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x]|_0^{\pi/2}-1=\pi-3$$

Енді $P(0<X<\frac{\pi}{4})$ табалық. Ол үшін:

$$P(0<X<\frac{\pi}{4})=\int_0^{\pi/4} f(x)dx=\int_0^{\pi/4}\sin x dx=-\cos x|_0^{\pi/4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

яғни $P(0<X<\frac{\pi}{4})=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Бұл ықтималдықты сондай-ақ интегралдық функцияны пайдаланып та табуға болатынын көрсетелік:

$$P(0<X<\frac{\pi}{4})=F(\frac{\pi}{4})-F(0)=(1-\cos\frac{\pi}{4})-(1-\cos 0)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

7-мысал. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ axe^{-\kappa x}, & 0<x<\infty, \kappa>0\end{cases}$$

Табу керек:
1. Коэффициент a-ны;
2. Үлестірім функциясын;
3. [0; 1/2] аралықтан мән қабылдау ықтималдығын.

Шешуі: 1.Коэффициент a-ны табу үшін үлестірім тығыздығының екіншісі қасиетін пайдаланамыз, яғни

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1 \qquad \frac{a}{\kappa^2} = 1, \quad a = \kappa^2$$

немесе

$$1 = a\int_0^\infty xe^{-\kappa x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ e^{-\kappa x}dx = dv & v = -\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x} \end{matrix} \right| \; a\left\{-\frac{x}{\kappa}e^{-\kappa x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty e^{-\kappa x}dx\right\} = \frac{a}{\kappa^2}$$

яғни $\frac{a}{\kappa^2} = 1, \alpha = \kappa^2$

Сонда $f(x) = \kappa^2 x e^{-\kappa x}$, $x>0$

2. Бұл жерде үлестірім тығыздығының төртінші қасиетін пайдаланамыз.

Сонда:

$$F(x) = \kappa^2\int_0^x xe^{-\kappa x}dx = \kappa^2\left[-\frac{x}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^2}\right]e^{-\kappa x}\Big|_0^x = 1 - (\kappa x + 1)e^{-\kappa x}, \quad x > 0$$

3. $P(0 < x < \frac{1}{\kappa}) = F(\frac{1}{\kappa}) - F(0) = 1 - 2e^{-1}$.

ЕСЕПТЕР

115. X – кездейсоқ шамасы бүкіл OX өсі бойынша мына үлестірім тығыздығымен $f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$ берілген. Тұрақты параметр С-ны табу керек.

116. X – кездейсоқ шамасы OX өсі бойында мына үлестірім функциясымен берілген:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx.$$

Кездейсоқ шаманың мына [0;1] аралықта мән қабылдауының ықтималдығы қандай?

117. X – кездейсоқ шама мына үлестірім тығыздығымен берілген:

а) $f(x)=\begin{cases}0{,}5, & x\in[0;2]\\ 0, & x\overline{\in}[0;2]\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$

M(X), D(X) табу керек.

118. Кездейсоқ шама ықтималдық тығыздығымен берілген:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{c}{x^2}, & x>1\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0 & x\le\pi/2\\ 3\sin 3x & \pi/2<x\le\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$

Белгісіз коэффициент С-ны, интегралдық функцияны табыңыз.

119. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:

а) f(x) = $\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<\infty$

Интегралдық функциясын және математикалық сипаттамаларын табыңыз.

120. Кездейсоқ шама ықтималдық тығыздығы арқылы берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{A}{x^2}, & x>1\end{cases}$$

1. Интегралдық функциясын жазыңыз.
2. Кездейсоқ шаманың [2;4] аралықтан мән қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

3. Төрт тәуелсіз сынақтарда осы кездейсоқ шаманың [1;2] интервалынан мән қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

121. Кездейсоқ шама ықтималдық тығыздығымен берілген:

а) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{2a-x}{2a^2}, & 0<x\le 2a \\ 0, & x>2a \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 0 & x\le a \\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} & -a<x\le a \\ 0 & x>a \end{cases}$

Интегралдық функциясын табыңыз.

122. Кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы берілген.

а) $F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x_0^3}{x^3}, & x\ge x_0 \\ 0, & x<x_0 \end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le \pi/2 \\ -\cos 3x & \pi/2<x<\pi \\ 1 & x>\pi \end{cases}$

Математикалық үмітті M(X) және дисперсияны D(X) табу керек.

123. Кездейсоқ шама үлестірім функциясы арқылы берілген:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right), & 0\le x\le \pi \\ 1, & x\ge \pi \end{cases}$$

Ықтималдық тығыздығын табыңыз.

124. Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген:

а) $F(x)=\begin{cases} 0, x<-1 \\ \dfrac{1}{3}(x+1), -1\le x\le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$ б $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases}$

Кездейсоқ шаманың [0,1] интервалдан мән қабылдау ықтималдығын табыңыз.

125. Ықтималдық тығыздығы арқылы

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0 & x\leq a\\ \dfrac{1}{8} & 0<x\leq 8\\ 0 & x>8\end{cases}$

берілген кездейсоқ шаманың математикалық үміті мен дисперсиясын табыңыз.

126. Кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы берілген

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a+b\cdot\arcsin x, & -1\leq x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \dfrac{x}{5} & 0<x\leq 5\\ 1 & x>5\end{cases}$

a және b сандарын, тығыздығын f(*x*) табу керек.

127. Кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы берілген:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{x-1}{2}, & 1\leq x\leq 3\\ 1, & x>3\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1-\cos x & 0<x\leq \pi/2\\ 1 & x>\pi/2\end{cases}$

Ықтималдықтың тығыздығын f(*x*), математикалық үмітті, дисперсияны және кездейсоқ шаманың [1;2] аралығында жату ықтималдығын табу керек.

128. Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген:

а) $F(x)=\begin{cases}0, x\langle 0\\ c(x^2+2x), 0\leq x\leq 1\\ 1, x\rangle 1\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{c} & 0<x\leq \pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$

Тұрақты c – санын, математикалық үмітті және дисперсияны табу керек.

129. Кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы берілген:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\pi}, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x^3}{8} & 0<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$

Ықтималдық тығыздығын f(x), математикалық үмітті табу керек.

130. Кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы берілген

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{a^2}\left(ax-\dfrac{x^2}{4}\right), & 0\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

a – санын, ықтималдық тығыздығын f(x), математикалық үмітті, дисперсияны және [0; 2] аралығынан мән қабылдау ықтималдығын табу керек.

131. Кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы берілген

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{12x-x^2-20}{16}, & 2\le x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$$

Ықтималдық тығыздығын f(x), математикалық үмітті және дисперсияны табу керек.

КЕЙБІР ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫ

1. Бірқалыпты үлестірім заңдары

Анықтама. Егер X – кездейсоқ шамасы $[a,b]$ аралығында мән қабылдаса және оның үлестірім тығыздығы:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\overline{\in}[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\end{cases} \qquad (2.2.12)$$

теңдігі арқылы анықталса, онда ол кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірім заңымен берілген дейді.

Бұл үлестірім заңдылығы үшін

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (2.2.13)$$

Интегралдық функциясы:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases} \qquad (2.2.14)$$

Берілген аралықтан $[c;\ d]$ мән қабылдау ықтималдығы:

$$P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a}; \qquad (2.2.15)$$

8-мысал. Кездейсоқ шама дифференциалдық функциясы арқылы берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Интегралдық функцияны табыңыз. M(x), D(x) есептеңіз.

Шешуі: Есептің шарты бойынша [0;1] аралығында f(x)=1, яғни тұрақты. Сондықтан бұл кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірім заңымен берілген. Мұнда a=0, b=1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Олай болса:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2},\ \mathrm{D}(X)=\frac{1}{12};\ A_S=0,\quad E_k=-1{,}2.$$

9-мысал. Автобустың аялдамаға келу интервалы 10 мин. Кездейсоқ шама – автобусты күту уақыты. Осы кездейсоқ шаманың дифференциалдық және интегралдық функцияларын жазыңыз.

Шешуі: Есептің шарты бойынша a=0, b=10. Сондықтан,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}1, & 0<x\le 10\\ 0, & x>10\end{cases}$$

Енді интегралдық функцияны табалық:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{10}, & 0<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases}$$

ЕСЕПТЕР

132. Кездейсоқ шама бірқалыпты үлестіріммен берілген. Оның ықтималдық тығыздығы:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{A}, & 2<x\le 9\\ 0, & x>9\end{cases}$$

Коэффициентт А-ны табыңыз. Дисперсиясын есептеңіз.

133. Кездейсоқ шама бірқалыпты үлестіріммен сипатталады.

Оның интегралдық функциясы

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ \dfrac{x-3}{7}, & 3<x\le 10\\ 1 & x>10\end{cases}$$

түрінде берілген. Кездейсоқ шаманың дифференциалдық функциясын анықтаңыз. Мына [4;9] интервалда мән қабылдау ықтималдығын табыңыз.

134. X – кездейсоқ шамасы мына [2;8] интервалда бірқалыпты үлестіріммен берілген. Математикалық үмітті табыңыз.

2. Көрсеткіштік үлестірім заңы

Анықтама. Егер X – кездейсоқ шамасы мына үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad (2.2.16)$$

арқылы берілсе, онда ол көрсеткіштік үлестірім заңымен берілген дейді.

Интегралдық функциясы:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases} \qquad (2.2.17)$$

Бұл үлестірімнің сандық сипаттамалары:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{1}{\lambda},\ \mathrm{D}(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda},\ A_S=2,\quad E_k=9 \qquad (2.2.18)$$

Кездейсоқ шаманың $[a,b]$ аралығынан мән қабылдау ықтималдығы:

$$P(a\le X\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b} \qquad (2.2.19)$$

10-мысал. Кездейсоқ шама интегралдық функциясы арқылы берілген:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-7x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Математикалық үмітті, дисперсияны табыңыз.

Шешуі: Әуелі ықтималдық тығыздығын табамыз.

$$f(x)=\begin{cases}7e^{-7x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Бұдан М(X]= $\frac{1}{7}$, D(X]= $\frac{1}{49}$, σ(X]= $\frac{1}{7}$

ЕСЕПТЕР

135. Телевизорды жөндеуге жұмсалатын уақыт кездейсоқ шама. Осы кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы:

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\leq 0\\ 1-e^{-\kappa t}, & t>0\end{cases}$$

түрінде берілген. Оның математикалық үмітін, дисперсиясын анықтаңыз.

136. Кездейсоқ шама өзінің дифференциалдық функциясы арқылы берілген:

$$f(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен кем мән қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

137. Су түбіндегі кемені іздеп табу уақыты кездейсоқ шама. Кемені t уақытында іздеп табу ықтималдығы

$P(t)=1-\bar{e}^{\gamma t}$, $\gamma>0$.

Кемені іздеп табуға қажетті орташа уақытты табыңыз.

Нұсқау. Берілген P(t) функциясын кездейсоқ шаманың интегралдық функциясы ретінде қарастыру керек.

138. Үзіліссіз кездейсоқ шама көрсеткішті үлестіріммен берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}04e^{-0{,}04x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Тәжірибе кезінде осы кездейсоқ шаманың [1;2] интервалынан мән қабылдауының ықтималдығын табу керек.

139. Кездейсоқ шама көрсеткішті үлестіріммен берілген:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 3e^{-3x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Математикалық сипаттамаларын табыңыз.

3. Қалыпты үлестірім заңы

Анықтама. Егер X – кездейсоқ шамасы мына үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}, \qquad (2.2.20)$$

арқылы берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңымен берілген дейді.

Мұнда

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2,\ A_S=0,\ E_k=0 \qquad (2.2.21)$$

Сондай-ақ

$$P(\alpha\leq X\leq\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\delta}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\delta}\right) \qquad (2.2.22)$$

қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шаманың берілген интервалдан мән қабылдауының ықтималдығы, $\Phi(x)$ – Лаплас функциясы. Мына формула

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (2.2.23)$$

кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы δ-дан кіші болуының ықтималдығын анықтайды.

Егер формулада $\delta=3\sigma$ болса, онда

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)$$

немесе

$$P(|X-a|<3\sigma)\approx 0{,}9973,$$

яғни кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы 3σ-дан аспауының ықтималдығы бірге өте жақын екенін көрсетеді.

Осыдан *үш сигма ережесі* шығады:

Егер кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілсе, онда оның математикалық үміттен ауытқуының абсолют шамасы үш орташа квадраттық ауытқудан аспайды.

11-мысал. Станок-автомат ұзындығы 125 мм детальдар дайындайды. Олардың берілген ұзындықтан ауытқуы 0,5 мм аспайды. Дайындалған детальдардың 7 проценті сапасыз. Деталь ұзындықтарын кездейсоқ шама ретінде қарастырып және оны қалыпты үлестірім арқылы берілген деп оның дисперсиясын табу керек.

Шешуі: X–кездейсоқ шама детальдар ұзындығы болсын. Есептің шарты бойынша детальдардың орташа ұзындығы 125 мм, олай болса $M(X)=a=125$ мм. Сондай-ақ дайындау кезінде $124{,}5<X<125{,}5$. Себебі берілген ұзындықтан ауытқу 0,5 мм аспайды. Сондықтан $\alpha=124{,}5$, $\beta=125{,}5$. $\sigma=?$ Енді (2.2.23) формуласын пайдаланайық.

$$P(124{,}5<X<125{,}5)=2\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)$$

Есептің шарты бойынша детальдардың 7 проценті сапасыз. Олай болса,

$$P(124{,}5<X<125{,}5)=0{,}93;\quad 2\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)=0{,}93,$$

яғни 0,93 ықтималдықпен сапалы детальдар дайындалады.

$\Phi(x)$ – функциясының кестесінен

$2\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)=0{,}93$ теңдігінен $\frac{0{,}5}{\sigma}=1{,}81$ аламыз.

Осыдан $\sigma^2=D(X)=0{,}078$

12-мысал. Кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілген және $M(X)=30$, $D(X)=4$. Мына теңсіздіктің $|x-30|<\delta$ ықтималдығы 0,8-ге тең болғанда δ қандай болу керек?

Шешуі: Есептің шарты бойынша:

$$P(|X-30|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right)=0{,}8$$

Осыдан $\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right)=0{,}4$

Кестеден $\frac{\delta}{2}=1{,}28$, $\delta=2{,}56$.

13-мысал. Кездейсоқ шама қалыпты үлестірім арқылы берілген. Математиалық үміті $M(X)=5$, $D=(X)=0,64$. Дифференциалдық функциясын жазыңыз. Мына [4; 7] интервалдан мән қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: Есептің шарты бойынша $M(X)=5$, $D(X)=0,64$, яғни $\sigma=0,8$. Сондықтан:

$$f(x)=\frac{1}{0,8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 0,64}}$$

$$P(4<x<7)=\Phi\left(\frac{7-5}{0,8}\right)-\Phi\left(\frac{4-5}{0,8}\right)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25)=$$

$$=0,4939+0,3944=0,8892$$

14-мысал. Айталық дайындалған бөлшектің бір өлшемі қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шама болсын, математикалық үміті a=10см, ал $\sigma=0,01$. 1) кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуы 0,025-тен артпауының ықтималдығын табыңыз; 2) бөлшектің өлшемі 10,03 сантиметрден артпайтындығының ықтималдығын табыңыз; 3) кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы 0,025-тен артпауының ықтималдығы 0,99-ға тең болуы үшін бөлшектің дайындалуының дәлдігін сипаттайтын σ қандай болуы керек?

Шешуі:

1. $P(|X-10|<0,025)=2\Phi\left(\frac{0,025}{0,01}\right)=0,9876$

2. $P(|X|\langle 10,03)=0,9973$

3. $P(|X-10|<0,02)=2\Phi\left(\frac{0,02}{\sigma}\right)=0,99$,

сонда кестеден:

$$\frac{0,02}{\sigma}=2,58,$$

осыдан: $\sigma=0,0077.$

ЕСЕПТЕР

140. Кездейсоқ шама дифференциалдық функция арқылы берілген:

$$f(x)=C\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{14}}$$

а) коэффициент С-ны табыңыз б) f(x) функциясының графигін салыңыз.

141. Кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілген. Математикалық үміті M(X)=2, орташа квадраттық ауытқуы σ=1. Кездейсоқ шаманың [4,7] интервалдан мән қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

142. Дайындалған детальдардың стандартты детальдардан ауытқуы қалыпты үлестіріммен берілген. Детальдың стандартты ұзындығы (математикалық үміті] a=40 см. Орташа квадраттық ауытқуы 0,4 см. Стандартты ұзындықтан ауытқуының абсолют шамасы 0,6 сантиметрден аспайтындығының ықтималдығын табыңыз.

143. Берілген партияда алманың салмағы кездейсоқ шама болып, ол қалыпты үлестірім арқылы берілген болсын және M(x) = 140 г, σ = 16 г.

1. Осы партиядан алынған кез келген алманың салмағы 124 граммнан 148 граммға дейін жететіндігінің ықтималдығы қандай?

2. Алынған алманың салмағы орташа салмақтан (a=140 г) ауытқуы + 8 граммнан аспайтындығының ықтималдығын табу керек.

144. Зауытта жасалған бөлшектің диаметрі қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шама. Диаметрдің стандартты ұзындығы a=2,5 см, ал орташа квадраттық ауытқуы σ = 0,01. Егер ақиқат оқиға ретінде ықтималдығы 0,9973-ке тең оқиғаны қарастырсақ, диаметрдің ұзындығы қандай аралықта жатуы керек?

145. Зауыт диаметрі d_0 = 5 мм шариктер дайындайды. Дайындау кезінде диаметрі берілген ұзындықтан ауытқуы кездейсоқ шама, ол қалыпты үлестіріммен берілген және орташа квадраттық ауытқуы σ = 0,01. Бақылау кезінде диаметрі берілген ұзындықтан 0,02 мм ауытқыған шариктер қабылданбайды. Бақылау кезінде шариктердің қанша проценті қабылданбайды?

146. Кездейсоқ шама X қалыпты үлестіріммен берілген, математикалық үміті a, орташа квадраттық ауытқуы σ. Берілген (α,β) интервалында осы қалыпты үлестірімді жуықтап бірқалыпты үлестіріммен ауыстыру керек. Біракта кездейсоқ шаманың берілген сандық сипаттамалары өзгермей сақталатын болсын.

Нұсқау. Берілген сандық сипаттамалар сақталу үшін қалыпты үлестіріммен бірқалыпты үлестірімнің сәйкес сандық сипаттамаларын теңестіру арқылы α және β сандарын анықтау қажет.

147. Кездейсоқ шама X қалыпты үлестіріммен берілген. Математикалық үміті a, орташа квадраттық ауытқуы σ. $f(x)$ функциясының графигінің иілу нүктелерінің координаталарын анықтаңыз.

148. Қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шаманың математикалық үміті a=0, ал оның ($-в$; $в$) аралықтан мән қабылдау ықтималдығы 0,5. Орташа квадраттық ауытқуын тауып үлестірім тығыздығын жаз.

149. Мылтықты оқтағанда оның ішіне салатын оқ-дәрінің орташа мөлшері 2,3 г болуы керек. Оқ-дәріні өлшеген кезде жіберілген қате қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шама. Оның дисперсиясы $\sigma^2 = 0{,}04$. Егер оқ-дәрі мөлшерден артық салынса, онда атыс кезінде мылтық істен шығады. Егер ең көп дегенде 2,8 г оқдәрі салуға болатын болса, онда бір атыстан соң мылтықтың істен шығуының ықтималдығы қандай?

150. Мылтық атқанда оқтың ұшу қашықтығы қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шама. Оның дисперсиясы 900 $м^2$. Нысанадан 20 метрден 50 метрге дейін қашықтықтан асып түсетін оқтардың қанша процент болатынын табыңыз.

Нұсқау. Нысанаға дейінгі қашықтықты a=M(x] деп қабылдау керек.

151. Ұсталған балықтың салмағы қалыпты үлестірім заңына бағынады. Оның параметрлері a=400 г, σ=40. Сонда ұсталған бір балықтың салмағы:

1) 300 грамнан 500 грамға дейін болатындығының ықтималдығын табыңыз;

2) 300 граммнан артық болатындығының ықтималдығын табыңыз;

3) 450 граммнан артық болмайтындығының ықтималдығын табыңыз.

152. Подшипниктерге арналған шариктердің диаметрінің ұзындығы қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шама. Математикалық үміті a= 4,5 см, σ=0,05 см. Мүмкін мәндері 0,9545 ықтималдығымен қабылданатын интервалды анықтаңыз.

153. Қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шаманың параметрлері a=16 см, σ=2 см. Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуы 3,92-ден артпауының ықтималдығын табыңыз.

154. Екі елді мекеннің арасын өлшеу қорытындысы қалыпты үлестірім заңымен берілген. Оның математикалық үміті a=16 км, ал орташа квадраттық ауытқуы σ=100 м. Осы екі елді мекеннің ара қашықтығы: 1) 15,8 километрден кем болмауының ықтималдығын табыңыз; 2) 16,25 километрден артық болмауының ықтималдығын табыңыз; 3) 15,75 километр мен 16,3 километрдің арасында болуының ықтималдығын табыңыз.

155. Ересек әйелдің бойының ұзындығы кездейсоқ шама. Ол қалыпты үлестіріммен сипатталады және оның параметрлері a=164 см, σ=5 см. Кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығын жазыңыз және $P(165<x<168)$ ықтималдығын табыңыз.

156. Ересек ер адамның бойының ұзындығы кездейсоқ шама. Оның параметрлері a=170 см, дисперсиясы σ^2=36. Кез келген 4 ер адамның ең болмағанда біреуінің бойының ұзындығы [168, 172] аралығында жататындығының ықтималдығын табыңыз.

Нұсқау. Әуелі $P(168<X<172)$ ықтималдығын тауып алу керек.

157. Зауытта шығарылатын бұйымның бақылауға алынған бір өлшемі қалыпты үлестіріммен сипатталады және оның параметрлері a=5 см, σ^2 = 0,81.

1). Кез келген бұйымның бақылауға алынған өлшемі [4;7] аралығында жататындығының ықтималдығын анықтаңыз.

2). Бақылауға алынған өлшемнің математикалық үміттен ауытқуы 2 см аспайтындығының ықтималдығын табыңыз.

158. Станоктан шығарылған шегенің ұзындығы қалыпты үлестіріммен сипатталады, оның математикалық үміті a=2,5 см, дисперсиясы σ^2=0,0001. Алынған кез келген шегенің ұзындығы математикалық үмітінен ауытқуының ықтималдығы 0,9973 болуы үшін кездейсоқ шама қандай интервалда жатуы керек?

159. X – кездейсоқ шамасы қалыпты үлестіріммен берілген және $M(x)$=25. Кездейсоқ шаманың (10; 15] интервалынан мән қабылдау ықтималдығы 0,2-ге тең. Осы кездейсоқ шаманың [35; 40] интервалынан мән қабылдауының ықтималдығын табыңыз.

160. Аргументтің кейбір мәндерінде:

1. Үлестірім функциясы бірден үлкен болуы мүмкін бе?
2. Үлестірім тығыздығы бірден үлкен болуы мүмкін бе?
3. Үлестірім функциясы теріс болуы мүмкін бе?
4. Үлестірім тығыздығы теріс болуы мүмкін бе?

161. Кездейсоқ шамаға тұрақты a саны қосылды. Сонда математикалық сипаттамалар қалай өзгереді: 1) Математикалық үміт; 2) дисперсия; 3) орташа квадраттық ауытқуы; 4) екінші бастапқы момент?

162. Кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілген және $a=0$, $\sigma=1$. Сонда мына екі ықтималдықтардың қайсысы үлкен $P(-0,5 \le x \le -0,1)$ немесе $P(1 \le x \le 2)$?

163. Кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

X	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Табу керек: M_0, M_D, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, A_s, $E_к$.

164. Кездейсоқ шама үлестірім тығыздығымен берілген:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{3x^2}{2}, & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & 1\le x\le 2 \\ 0, & x\ge 2 \end{cases}$$

Табу керек: M_0, M_D, ν_1 - ν_4, μ_1 - μ_4, A_s, $E_к$.

165. Кездейсоқ шама Релей үлестірімі арқылы берілген:

$$F(x)=1-e^{-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}}$$

Табу керек: M_0, M_D.

166. Кездейсоқ шама үлестірім тығыздығымен берілген:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ a-\dfrac{a^2}{2}x & 0<x\le \dfrac{2}{a} \\ 0 & x>\dfrac{2}{a} \end{cases}$$

Үлестірім функциясын тап.

§ 3. Кездейсоқ шамалар жүйелері

(Кездейсоқ векторлар)

Бір элементарлық кеңістікте $X_1, X_2, ..., X_n$ кездейсоқ шамалар анықталған болсын. Сонда $X_1, X_2, ..., X_n$ кездейсоқ шамалар жүйіссі деп аталады, ал $Z(X_1, X_2, ..., X_n)$ кездейсоқ вектор деп аталады, мұндағы $X_1, X_2, ..., X_n$ оның координаталары болады.

Бірөлшемді кездейсоқ шамаларға қатысты негізгі түсініктер мен анықтамалар көпөлшемді кездейсоқ шамалар үшін де сақталады.

Екіөлшемді үзіліссіз кездейсоқ шамалар үлестірім функциясы немесе дифференциалдық үлестірім функциясы арқылы анықталады.

Үлестірім функциясы $X<x$ және $Y<y$ теңсіздіктерінің бірмезгілде орындалуының ықтималдығы ретінде анықталады:

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y). \qquad (2.3.1)$$

Негізгі қасиеттері:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$
2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$
3. $F(\infty,y)=F_2(y)$
4. $F(x, \infty)=F_1(x)$
5. $P(x_1 \le X \le x_2,\ y_1 \le Y \le y_2) = (F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1))$.

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін

$$F(x,y] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (2.3.2)$$

Мұнда $f(x, y)$ – дифференциалдық үлестірім функциясы

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y).$$

Ал дискретті кездейсоқ шамалар үшін

$$F(x,y) = \sum_{x<x_i}\sum_{y<y_i} P(X = x_i, Y = y_i). \qquad (2.3.3)$$

Егер $F(x,y) = F_1(x)F_2(y),\ \ f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

болса, онда X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамалар деп аталады, дискретті кездейсоқ шамалар үшін тәуелсіздік шарты:

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)\cdot P(Y = y_i).$$

Екіөлшемді дискретті кездейсоқ шамалар кесте арқылы беріледі.

2.1-кесте

Y \ X	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n	P_x
x_1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1j}	…	P_{1n}	P_{x1}
x_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2j}	…	P_{2n}	P_{x2}
⋮	…	…	…	…	…	…	…
x_i	P_{i1}	P_{i2}	…	P_{ij}	…	P_{in}	P_{xi}
⋮	…	…	…	…	…	…	…
x_m	P_{m1}	P_{m2}	…	P_{mj}	…	P_{mn}	P_{xm}
P_y	P_{y1}	P_{y2}	…	P_{yj}	…	P_{yn}	1

Осы кестеден X және Y функцияларының үлестірім кестелері былай жазылады:

2.2-кесте

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m
P_x	P_{x1}	P_{x2}	…	P_{xi}	…	P_{xm}

У	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n
P_y	P_{y1}	P_{y2}	…	P_{yj}	…	P_{yn}

Сондай-ақ, шартты ықтималдықтар төмендегі түрде анықталады:

$$P_i(x_i / y_j) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{Py_j}, i = \overline{1,m},$$

$$P_j(y_j / x_i) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{Px_i}, j = \overline{1,n}.$$

Сандық сипаттамалары

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij},$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_j - M(Y))^2 p_{ij}.$$

Сондай-ақ екі өлшемді кездейсоқ шамалар үшін ковариация, корреляция коэффициенттерінің маңызы зор:

$$\operatorname{cov}(x,y) = M\{[x - M(X)][y - M(Y)]\},$$

$$r(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}};$$

Осында, егер x және y тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса онда, $r(x,y) = 0$ болады.

Шартты математикалық үміттер:

$$M(Y/X=x) = \sum_{j=1}^{n} y_j P(y_j/x),$$

$$M(X/Y=y) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(x_i/y).$$

1-мысал. Техникалық бақылау бөлімі шығарылған бөлшектердің стандартын тексереді. Негізгі тексерілетін параметрлер олардың ұзындығы мен ені. Сонда X – детальдің енінің стандарттан ауытқуы, Y – ұзындығының стандарттан ауытқуы. Кездейсоқ шамалар кестемен берілген

1-кесте

X \ Y	-1	0	1	Px
-2	0,21	0,17	0,32	0,7
3	0,12	0,07	0,11	0,3
Py	0,33	0,24	0,43	1.00

1. X және Y кездейсоқ шамалардың үлестірім зандарын жазыңыз.
2. а) X-тің $Y=y_3$ болғандағы шартты үлестірім заңын жазыңыз;
б) Y-тің $X=x_2$ болғандағы шартты үлестірім заңын жазыңыз.
3. X пен Y өзара тәуелсіз бе?
4. Үлестірім функциясын $F(x,y)$ табыңыз:

Бір өлшемді X және Y кездейсоқ шамалардың үлестірім $F_1(x)$ және $F_2(y)$ функкияларын жазыңыз.

5. Корреляциялық коэффициентті табыңыз.

6. Шартты математикалық үміттерін табыңыз.

Шешуі: 1-кестеден X және Y кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдары төмендегідей түрде жазылады:

2-кесте

X	-2	3
Px	0,7	0,3

3-кесте

Y	-1	0	1
Py	0,33	0,24	0,43

2. а) X-тің $Y=y_3$ болғандағы шартты үлестірім заңын жазу үшін әуелі

$P(x_1 / Y = y_3)$, $P(x_2 / Y = y_3)$ – терді табамыз:

$$P(x_1 / Y = y_3) = \frac{P(X = x_1, Y = y_3)}{Py_3} = \frac{0{,}32}{0{,}43} = \frac{32}{43}$$

$$P(x_2 / Y = y_3) = \frac{P(X = x_2, Y = y_3)}{Py_3} = \frac{0{,}11}{0{,}43} = \frac{11}{43}$$

Сонда мына үлестірім заңын аламыз:

4-кесте

X	-2	3
$P(X/Y=y_3]$	$\frac{32}{43}$	$\frac{11}{43}$

б) Y-тің $X=x_2$ болғандағы шартты үлестірім заңын осылай есептесек:

5-кесте

Y	-1	0	1
$P(У/X=x_2]$	12/30	7/30	11/30

3. X және Y тәуелсіз бе?

Екі X және Y кездейсоқ шамалардың өзара тәуелсіздігін анықтау үшін олардың сәйкес шартты және шартсыз үлестірім заңдарын салыстыру керек. Егер ол заңдар бірдей кестелермен берілсе, онда олар тәуелсіз болғаны, ал егер ол кестелер бірдей болмаса, онда олар тәуелді болғаны. Сондықтан біз 2-ші мен 4-ші және 3-ші мен 5-ші кестелерді өзара салыстырсақ, олардың бірдей еместігін байқаймыз, олай болса X және Y өзара тәуелді кездейсоқ шамалар болады.

4. Үлестірім функциясын (2.3.3) формуланы пайдаланып жазамыз

Енді $F_1(x)$ және $F_2(y)$ функцияларын 2 мен 3-кестені пайдаланып табамыз:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le -2,\ y\le -1\\ 0{,}21, & x\le 3,\ y\le 0\\ 0{,}38, & x\le 3,\ y\le 1\\ 0{,}70, & x\le 3,\ y>1\\ 0{,}82, & x>3,\ y\le 0\\ 0{,}89, & x>3,\ y\le 1\\ 1, & x>3,\ y>3\end{cases}$$

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ 0{,}7, & -2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}\quad F_2(x)=\begin{cases}0, & y\le -1\\ 0{,}33, & -1<y\le 0\\ 0{,}57, & 0<y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$$

5. Корреляциялық коэффициентті

$$\operatorname{cov}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))P_{ij}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_i p_{ij}-M(X)M(Y)$$

формуласын пайдаланып табалық.

Әуелі M(X) және M(Y)-терді 2-3-кестелерді пайдаланып табамыз.

M(X) = $-2\cdot 0{,}7+3\cdot 0{,}3=-0{,}5$; D($X$)=5,25, $\sigma_x=2{,}29$

$M(y) = -1 \cdot 0{,}33 + 0 \cdot 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}43 = 0{,}1$, $D(y) = 0{,}87$, $\sigma_y = 0{,}866$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} = -2(-1 \cdot 0{,}21 + 1 \cdot 0{,}32) + 3(-1 \cdot 0{,}12 + 1 \cdot 0{,}11) =$$

$$= -0{,}22 - 0{,}03 = -0{,}25$$

Сонда:

$$\operatorname{cov}(x, y) = -0{,}25 - (-0{,}5 \cdot 0{,}1) = -0{,}2, \; r_{xy} = \frac{-0{,}2}{2{,}29 \cdot 0{,}87} = -0{,}101$$

Осыдан $r_{xy} \neq 0$ екенін көреміз, яғни X және Y өзара тәуелді кездейсоқ шамалар болады.

6. Айталық $M(X/Y=y_3)$ және $M(Y/X=x_2)$ табу керек болсын. Оларды табу үшін 4–5-кестелерді пайдаланамыз. Сонда:

$$M(X / Y = y_3) = -2 \cdot \frac{32}{43} + 3 \cdot \frac{11}{43} = -\frac{31}{43}$$

$$M(Y / X = x_2) = -1 \cdot \frac{12}{30} + 0 \cdot \frac{11}{43} + 1 \cdot \frac{11}{30} = -\frac{1}{30}.$$

2-мысал. Өзара тәуелсіз X және Y кездейсоқ шамалар сәйкес [a,b] және [c,d] аралықтарында бірқалыпты үлестірім заңдарымен берілген. Табу керек: 1. $f_1(x)$, $f_2(y)$ үлестірім тығыздықтарын; 2. (X,Y) жүйесінің $f(x,y)$ үлестірім тығыздығын; 3. X және Y кездейсоқ шамаларының $F_1(x)$ және $F_2(y)$ үлестірім функцияларын; 4. (X,Y) жүйесінің $F(x,y)$ үлестірім функциясын; 5. $x_1, x_2 \in [a,b]$ және $y_1, y_2 \in [c,d]$ болғанда $P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)$ табу керек.

Шешуі: Бірқалыпты үлестірімнің анықтамасы бойынша:

1. $$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \; x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < c, \; y > d \\ \dfrac{1}{d-c}, & c \le y \le d \end{cases}$$

2. X және Y тәуелсіз болғандықтан

$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, осыдан:

$$F=(x,y)=\begin{cases}0, & x<a,\quad y<c,\quad x>b,\quad y>d\\ \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b,\qquad c\le y\le d\end{cases}$$

3. $$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{(b-a)}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

$$F_2(y)=\begin{cases}0, & y<c\\ \dfrac{y-c}{d-c}, & c\le y\le d\\ 1, & y>d\end{cases}$$

4. X және Y тәуелсіз болғандықтан $F(x,y]=F_1(x]F_2(y]$, осыдан:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a,\qquad y<c\\ \dfrac{x-a}{(b-a)}\cdot\dfrac{y-c}{d-c}, & a\le x\le b,\ c\le y\le d\\ \dfrac{x-a}{b-a}\cdot 1, & a\le x\le b,\ y>d\\ 1\cdot\dfrac{y-c}{d-c}, & x>b,\qquad c\le y\le d\\ 1, & x>b,\qquad y>d\end{cases}$$

5. Үлестірім функциясының бесінші қасиеті бойынша:
$P(x_1\le X\le x_2,\ y_1\le Y\le y_2) = [F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)]$

3-мысал. Екі кездейсоқ X және Y шамалар жүйесі үлестірім функциясымен берілген:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\ y<0\\ 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x\geq 0,\ y\geq 0\end{cases}$$

Үлестірім тығыздықтары $f(x,y), f_1(x), f_2(y)$ және $F_1(x), F_2(y)$-ті тап.

Шешуі:

1. $$f(x,y)=F''_{xy}(x,y)=\begin{cases}0, & x<0, & y<0\\ e^{-x-y}, & x\geq 0, & y\geq 0\end{cases}$$

2. $$F_1(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0, & y<0\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$F_2(y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0, & y<0\\ 1-e^{-x}, & y\geq 0\end{cases}$$

3. $$f_1(x)=\begin{cases}0, x<0\\ e^{-x}, x\geq 0\end{cases}$$ 4. $$f_2(y)\ f(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-x}, & y\geq 0\end{cases}$$

ЕСЕПТЕР

167. X және Y кездейсоқ шамалардың жүйесінің үлестірім заңы кесте арқылы берілген.

X \ Y	0	1	2	3
1	0,04	0,05	0,01	0,06
4	0,24	0,15	0,04	0,07
6	0,05	0,10	0,09	0,10

Табу керек:
1. X және Y-тің әрқайсысының үлестірім заңдарын.
2. $X=x_1=1$ болғандағы Y-тің шартты үлестірім заңын.
3. X пен Y тәуелді ме?
4. $P(x<4,y<2)=?$
5. Корреляциялық коэффициентті (r_{xy}).

168. X және Y кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірім заңы кесте арқылы берілген.

Y \ X	-1	0	1
0	0	0,2	0,1
1	0,4	0,1	0,2

Табу керек: 1. X және Y-тің әрқайсысының үлестірім заңдарын.
2. Y=1 болғанда X-тің шартты үлестірім заңын.
3. X пен Y тәуелді ме?

169. Екі атқыш бір нысанаға бір-бірінен тәуелсіз екі атыс жасады. Біріншісінің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8, екіншісінікі – 0,6. Айталық X – бірінші атқыштың нысанаға тигізген оқтарының саны, Y – екінші атқыштың тигізген оқтарының саны. Табу керек: 1. X және Y кездейсоқ шамаларының жүйесінің үлестірім заңын. 2. X және Y-тің әрқайсысының үлестірім заңдарын.

170. Жәшікке бірдей 5 қызыл, 2 жасыл және 3 көк шар салынған. Жәшіктен 3 шар алынды. Айталық X–алынған қызыл шарлар саны, Y – алынған жасыл шарлар саны болсын. Табу керек: 1. X пен Y-тің үлестірім заңдарын; 2. (X,Y) жүйесінің үлестірім заңы; 3. r_{xy} – тап.

171. X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамалар сәйкес [4;6] және [0;3] аралықтарында бірқалыпты үлестіріммен берілген.

Табу керек: 1. $f_1(x), f_2(y)$-ті; 2. $F_1(x), F_2(y)$-ті; 3. (X,Y) жүйесінің $f(x,y)$ үлестірім тығыздығын; 4. $F(x,y)$-ті. 5. P(5<x<6, 1<y<2]-ті.

172. (X,Y) жүйесі үлестірім функциясы арқылы берілген:

$$F(x,y)=\begin{cases} o, x<0, y<0 \\ (1-e^{-ax})(1-e^{-by}), {}_{a>0,b>0}^{x\geq 0, y\geq 0} \end{cases}$$

Табу керек: 1. $f(x,y)$ – үлестірім тығыздығын;

2. $F_1(x)$ және $F_2(y)$ – функцияларын.

3. $P\left(0<x<\frac{1}{a}, \quad 0<y<\frac{1}{b}\right)$.

173. (X,Y) жүйесі үлестірім тығыздығы арқылы берілген:

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}$$

Табу керек: 1) a – тұрақты санын, 2) F(x,y) – үлестірім функциясын;

3. $P\left(0<x<\sqrt{3},\quad 0<y<1\right)$.

174. (X,Y) жүйесі үлестірім тығыздығы арқылы берілген:

$$f(x,y)=\begin{cases} a\sin(x,y),\ 0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2} \\ 0,\ x,y- \end{cases}$$

Табу керек: 1) a – тұрақты санын.
2) F(x,y) – үлестірім функциясын.

§ 4. Кездейсоқ шамалар функциясы

Кездейсоқ шамалар $X_1, X_2, ..., X_n$ жүйесін қарастыралық. Олардың әрқайсысының үлестірім заңдары белгілі болсын. Сонда кездейсоқ шамалар функциясы мына түрде беріледі:

$$Y=\varphi(X_1, X_2, ..., X_n). \qquad (2.4.1)$$

Осы кездейсоқ шама Y-тің үлестірім заңын табу керек. Бір кездейсоқ шаманың функциясын қарастыралық:

$$Y=\varphi(X). \qquad (2.4.2)$$

Мұнда X дискретті немесе үзіліссіз кездейсоқ шама болуы мүмкін.

1. X – дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген. Сонда у – кездейсоқ шаманың үлестірім заңы:

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	...	P_n

2. X – үзіліссіз кездейсоқ шама f(x) үлестірім тығыздығымен берілген, сонда Y – кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазу үшін оның g(y) үлестірім тығыздығын табу керек. Екі жағдай болуы мүмкін:

1. $\varphi(x)$ функциясы [a,b] аралығында монотонды-өспелі үзіліссіз және дифференциалданатын функция. Онда осы аралықта оның бір ғана $x=\phi(y)$ кері функциясы бар болады да

$$g(y) = f(\varphi(\varphi(\cdot \mid \varphi'(y) \mid) \tag{2.4.3}$$

орындалады.

2. y= φ(x) функциясы монотонды емес.

Сондықтан оның $x_1=\phi_1(y)$, $x_1=\phi_2(y)$,..., $x_n=\phi_n(y)$ кері функциялары болады да

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f[\phi(y)]\cdot|\phi_i'| \tag{2.4.4}$$

орындалады.

1-мысал. Кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген

X	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

$y=(4-x)\cos\pi x$ функциясының үлестірім кестесін табыңыз.

Шешуі: Әуелі y-тің мүмкін мәндерін анықталық:

$y=(4-0)\cos\pi 0=4$, $y_2=y(1)=-3$,

$y_3=y(2)=2$, $y_4=y(3)=-1$

Сонымен:

y	-3	-1	2	4
q	q_1	q_2	q_3	q_4

кестесін алдық.

Енді q_i-дің мәндерін табайық.

$q_1=p(y=-3)=p(x=1)=0,2$

$q_2=p(y=-1)=p(x=3)=0,4$

$q_3=p(y=2)=p(x=2)=0,3$

$q_4=p(y=4)=p(x=0)=0,1$

Сөйтіп, ақырында

y	-3	-1	2	4
q	0,2	0,4	0,3	0,1

үлестірім кестесін алдық.

2-мысал. Кездейсоқ шама үлестірім тығыздығымен берілген:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$y=x^3$ кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығын тап.

Шешуі: $y=x^3$ функциясы монотонды-өспелі, үзіліссіз және дифференциалданатын функция. Сондықтан оның кері функциясы $x=\sqrt[3]{y}$ болады. Осыдан (2.4.3) формуланы пайдаланып

$$g(y) = f\left[\sqrt[3]{y}\right]\cdot\left|\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\right| = \lambda e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}.$$

3-мысал. Екі мерген нысанаға бір-бірінен тәуелсіз сәйкесінше 2 және 3 атыс жасайды. Біріншісінің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,9; ал екіншісінікі – 0,8. X,Y – бірінші және екінші мергеннің нысанаға тигізу сандары. Z=X+Y, Z=X·Y кездейсоқ шамалардың үлестірім кестесін жазыңыз. M(X+Y), M(X·Y) табыңыз.

Шешуі: X және Y кездейсоқ шамалар биномдық үлестірім заңымен берілген. Сондықтан Бернулли формуласын пайдаланып

X	0	1	2
P	0,01	0,18	0,81

Y	0	1	2	3
Py	0,08	0,096	0,384	0,512

үлестірім кестелерін аламыз.

Енді Z=X+Y, Z= X·Y кездейсоқ шамаларының мүмкін мәндерін x_i+y_j және $x_i \cdot y_j$ табалық. Олардың ықтималдықтары $P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$ арқылы есептеледі. Енді x_i+y_j және $x_i \cdot y_j$ мүмкін мәндерін есептейміз.

x_i+y_j	x_1+y_1	x_1+y_2	x_1+y_3	x_1+y_4	x_2+y_1	x_2+y_2	x_2+y_3	x_2+y_4
x_iy_j	x_1y_1	x_1y_2	x_1y_3	x_1y_4	x_2y_1	x_2y_2	x_2y_3	x_2y_4
P	p_1q_1	p_1q_2	p_1q_3	p_1q_4	p_2q_1	p_2q_2	p_2q_3	p_2q_4

Осыдан:

X+Y	0	1	2	3	4	5
P	0,0008	0,0024	0,0276	0,152	0,4032	0,41472

XY	0	1	2	3	4	6
P	0,01792	0,01728	0,14688	0,09216	0,31104	0,41472

үлестірім заңдарын аламыз.

Сондай-ақ M(X+У)=4,2; M(X ·У)=4,320067

Математикалық статистикада тәуелсіз қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шамалардың функциясы болып келетін үлестірім заңдарымен берілген кездейсоқ шамалар қарастырылады. Солардың жиі кездесетін үшеуін төменде қарастырамыз.

1. X_ν – квадрат үлестірім (χ^2 –үлестірім). Айталық $X_1, X_2, ..., X_\nu$– тәуелсіз қалыпты кездейсоқ шамалар берілсін және a=0, σ=1 болсын.

Енді

$$\chi_\nu^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + \chi_\nu^2$$

кездейсоқ шамасын қарастырайық.

Бұл кездейсоқ шаманың үлестірім заңы χ^2 – үлестірім деп аталады. Мұнда ν – еркіндік дәрежелер саны деп аталады.

Жалпы жағдайда $X_к(к=\overline{1,\nu})$ қалыпты үлестірім параметрлері a, σ болса, онда $y_i = \dfrac{x_i - a}{\sigma}$ алмастыруы арқылы параметрлері (0,1) болатын қалыпты үлестірімге келтіруге болады, яғни

$$\chi_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} = \frac{(x_i - a)^2}{\sigma^2}.$$

χ^2 – үлестірімнің кестесі барлық оқулықтарда келтірілген.

2. Стьюдент үлестірімі (t – үлестірім).

Айталық параметрлері 0 және σ болатын тәуелсіз қалыпты үлестіріммен берілген X_i $(i=\overline{1,\nu})$ кездейсоқ шамалар болсын. Сонда Стьюдент үлестірімі мына түрде анықталады:

$$t_\nu = \frac{x_o}{\sqrt{\dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu} X_i^2}}$$

Мұнда ν – еркіндік дәрежелер саны.

Егер қалыпты үлестірімнің параметрлері a және σ болса, онда $x_i - a$ кездейсоқ шамалары да тәуелсіз болады да, олардың параметрлері сәйкес 0 және σ болады. Сонда Стьюдент үлестірімі төмендегідей беріледі:

$$t_\nu = \frac{x_o - a}{\sqrt{\dfrac{1}{\nu}(\chi_\nu - a)^2}}$$

Ал a=0, σ =1 болса, онда Стьюдент үлестірімі

$$t_v = \frac{x_o}{\sqrt{\frac{1}{v}\chi_v^{\ 2}}}$$

болады, мұндағы χ_v^2 жоғарына қарастырылған χ^2 үлестірімі.

3. Фишер үлестірімі /F – үлестірімі/

Айталық параметрлері $(0,\sigma]$ болатын тәуелсіз қалыпты үлестіріммен берілген кездейсоқ шамалар қарастырылсын:

$$X_1, X_2, ..., X_{n_1}, X_{n_1+1}, ..., X_{n_1+n_2}$$

Сонда мына функция арқылы берілген кездейсоқ шаманы Фишер үлестірімі арқылы берілген деп атайды:

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} x_j^{\ 2}}.$$

Егер x_i – кездейсоқ шамалардың параметрлері (a,σ) болса, онда Фишер үлестірімі төмендегідей анықталады:

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - a)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}(x_j - a)^2}.$$

Ал егер $a=0$, $\sigma=1$ болса, онда Фишер үлестірімі былай жазылады:

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\frac{1}{n_1}\chi_{n_1}^2}{\frac{1}{n_2}\chi_{n_2}^2}.$$

Мұндағы $\chi_{n_1}^2$ және $\chi_{n_2}^2$ кездейсоқ шамалары χ^2 – үлестіріммен берілген.

ЕСЕПТЕР

175. Жоғарыда қарастырылған үшінші мысалдың мазмұнына сәйкес $Z=2(X+Y)+1$ және $Z=2Y^2-1$ кездейсоқ шамалардың үлестірім кестелерін жаз.

176. Тиын үш рет лақтырылған. X – елтаңба пайда болу саны. Y – цифрдің пайда болу саны. X+Y кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарын жаз.

177. X кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

x	0	1	2	3
q	0,1	0,3	0,4	0,2

$y=\sin\frac{\pi}{2}x+1$ функциясының үлестірім заңын жазыңыз.

178. (X,Y) жүйесі үлестірім кестесімен берілген:

X \ Y	-2	-1	0	1
-1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,10

$Z=X+Y$, $Z=X\cdot Y$кездейсоқ шамаларының үлестірім кестелерін жазыңыз.

§ 5. Үлкен сандар заңы

Үлкен сандар заңы бірнеше теоремалар арқылы беріледі. Бұл теоремаларда (С.Чебышев, Бернулли; Пуассон теоремалары) өте көп кездейсоқ факторлардың жиынтық әсері, кездейсоқтықтан тәуелсіз нәтижелер алудың шарттары беріледі.

1. Чебышев теңсіздігі

Егер X кездейсоқ шамасының дисперсиясы бар болса, онда мына теңсіздіктер орындалады:

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\geq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2.5.1)$$

$$P(|X-M(X)|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2.5.2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$.

Бұл теңсіздіктер кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуын бағалайды.

1-мысал. Дискретті кездейсоқ шама мынадай үлестірім заңымен берілген:

X	-1	0	2	4	6
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

1. Мына $|X-M(X)|<5$ теңсіздіктің орындалуының ықтималдығын табыңыз.

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-M(X)|<5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Әуелі математикалық үміт пен дисперсиясын табалық.
$M(X) = -0,2 + 0,6 + 0,2 + 0,3 = 0,9.$

Енді дисперсиясын табу үшін X^2-тың үлестірім заңын жазамыз:

X^2	1	0	4	16	36
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Сонда:

$M(X^2) = 0,2 + 1,2 + 0,8 + 1,8 = 4.$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4 - 0,81 = 3,19.$

1. Енді $|X-0,9|<5$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын табу үшін осы теңсіздікті қанағатандыратын X-тің мәндерін анықтау қажет. Берілген үлестірім кестесінен бұл теңсіздікті кездейсоқ шаманың $x=-1$, $x=0$, $x=2$, $x=4$ мәндері қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. Олай болса:

$P(|X-0,9| < 5) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) =$ $0,2+0,4+0,3+0,05=0,95.$

Сонымен:

$$P(|X-0,9|<5)=0,95$$

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-0,9|<5$ теңсіздігінің орындалуын бағалайық:

$$P(|X-0,9|<5)\geq 1-\frac{3,19}{25}=0,8725$$

яғни

$$P(|X-0,9|<5)\geq 0,8725.$$

Сөйтіп Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-M(X)|\le 5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын төменнен бағаладық, яғни $|x-0{,}9|\le 5$ теңсіздігі кем дегенде 0,8724 ықтималдықпен орындалады. Бұл тұжырымның құндылығы есептер шығарған кезде $|x-M(x)| < \varepsilon$ ($\varepsilon>0$) теңсіздігінің орындалуының дәл ықтималдығын табу мүмкін болмаған жағдайларда оның ықтималдығын төменнен бағалауға мүмкіндік береді.

2-мысал. Жарық беруші торапқа 20 электршам параллель қосылған. Т уақыт ішінде әрбір шамның жарық беру ықтималдығы 0,8. Чебышев теңсіздігін пайдаланып Т уақыт аралығында жарық беруші электршамдар саны мен олардың арифметикалық орташа мәндерінің (математикалық үміті) айырмасының абсолюттік шамасының ықтималдығын бағалаңыз. Осы айырма: 1) төрттен кем болса; 2) төрттен кем болмаса.

Шешуі: Белгілі бір Т уақытында жарық беріп тұрған электршамдардың саны кездейсоқ шама. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген. Есептің шарты бойынша n=20, p=0,8, q=0,2.

Сондықтан:

$M(X) = 20\cdot 0{,}8 = 16,\ D(X) = 16\cdot 0{,}2 = 3{,}2.$

Енді Чебышев теңсіздігін пайдаланамыз.

1. $$P(|X-16|<4)\ge 1-\frac{3{,}2}{16}=0{,}8$$

2. $$P(|X-16|\ge 4)\le \frac{3{,}2}{16}=0{,}2$$

Сонымен:

$$P(|X-16|<4)\ge 0{,}8 \quad P(|X-16|\ge 4)\le 0{,}2$$

3-мысал. Зауыт өнімдерінің 75 процентін жоғарғы сортпен шығарады. Шығарылған 100 000 бұйымдардың ішінде жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың саны осы жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың математикалық үмітінен айырмасының абсолют шамасы 1000 данадан артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдар саны кездейсоқ шама. Оны X арқылы белгілейік. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестіріммен берілген. M(X) осы кездейсоқ шаманың математикалық үміті. Есептің шарты бойынша n = 100 000, p=0,75, q=0,25.

Сонда:

$M(X) = 100\,000 \cdot 0{,}75 = 75000, \quad D(X) = 18750$

Осыдан:

$$P\left(|X - M(X)| < 1000\right) \geq 1 - \frac{18750}{10^6} = 0{,}9812,$$

яғни

$$P\left(|X - M(X)| < 1000\right) \geq 0{,}98125.$$

ЕСЕПТЕР

179. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім заңдарымен берілген:

x	1	2
p	0,8	0,2

Мына $|X-M(X)|<1$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын табыңыз.

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-M(X)|<1$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

180. Детальдің орташа ұзындығы а = 50 см, ал дисперсиясы $\sigma^2 = 0{,}1$. Чебышев теңсіздігін пайдаланып алынған кез келген детальдің ұзындығы 49,5 сантиметрден 50,5 см аралығында болатынының ықтималдығын бағалаңыз.

181. Кез келген кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы үш орташа квадраттық ауытқудан артпауының ықтималдығын бағалаңыз.

182. Зауыттың жарамсыз радиошам жасап шығару ықтималдығы 0,25. Бір партияда 1000 радиошам болса, жарамсыз радиошамдардың саны 250-ден ауытқуының абсолют шамасы 40-тан кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.

183. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

x	0,3	0,6
p	0,2	0,8

$|X-M(X)|<0{,}2$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаңыз.

184. Елді мекенде судың тәулiк шығыны кездейсоқ шама. Оның орташа квадраттық ауытқуы 10 000 л. Осы елді мекенде бір күн ішінде су шығынының математикалық үміттен ауытқуының абсолют шамасы 25 000 литрден кем болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

185. Әрбір сынақта А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,5. Чебышев теңсіздігін пайдаланып 100 сынақта А оқиғасының 40-тан 60-қа дейінгі аралықта пайда болуының ықтималдығын бағалаңыз.

186. Кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

X	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1

Мына $|X-M(X)|<2$ теңсіздіктің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

187. Белгілі бір прибор тәуелсіз жұмыс істейтін 10 элементтен тұрады. Т уақыт ішінде әр элементтің жұмыс істемей қалу ықтималдығы 0,5. Т уақыт ішінде жұмыс істемей қалған элементтер мен осы жұмыс істемей қалған элементтердің орташа санының (математикалық үміті] айырмасының абсолют шамасының:

1) екіден кем болуының;

2) екіден кем болмауының ықтималдықтарын бағалаңыз.

188. Зауытта стандартқа жатпайтын радиошамдар шығару ықтималдығы 0,25. Шығарылған 2000 радиошамдардың ішінде стандартқа жатпайтын шамдар санының 500-ден айырмасы 75-тен кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.

189. Урнада 100 ақ, 100 қара шарлар бар. Урнадан кез келген шар алынып түсі анықталғаннан кейін қайта салынды. Урнадан 50 рет шар алынды. Осы алынған шарлардың ішінде ақ шарлардың саны мына (15, 35) интервалда болуының ықтималдығын бағалаңыз.

190. Кездейсоқ шама үлестірім заңымен берілген:

X	1	2	3
P	0,1	0,5	0,4

1. $|X-M(x)|<3$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын табыңыз.
2. $|X-M(x)|<3$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаңыз.

2. Чебышев теоремасы.

Егер $X_1, X_2, \ldots, X_n$ қос-қостан тәуелсіз кездейсоқ шамаларының ақырлы математикалық үміттері бар болып және дисперсиялары тұрақты С санымен шектелген болса, онда кез келген n саны үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (2.5.3)$$

орындалады.

Бұл теореманы Чебышев теңсіздігін пайдаланып дәлелдегенде төмендегі бағалау алынады:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2} \qquad (2.5.4)$$

Егер $M(x_i)=a$ болса, онда (2.5.3) формула былай жазылады:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (2.5.5)$$

Чебышев теоремасының мағынасын түсіндіру үшін мысал қарастырайық. Айталық белгілі бір бұйымның бір өлшемі А болсын. Соны өлшеу керек. Өлшеу кезінде әртүрлі себептерге байланысты қате кетеді. Сондықтан өлшеу кезінде алынған нәтиже кездейсоқ шама болады. Бұл Х кездейсоқ шаманың математикалық үміті өлшеп отырған А шамасына тең болады, ал дисперсиясы D(X) пайдаланып отырған прибордың дәлдігін көрсетеді. Тәуелсіз n өлшеу жасалық.

Сонда $X_1, X_2, ..., X_n$ сәйкес бірінші, екінші, ... , n-ші өлшеулердің нәтижелері. Бұлардың өздері кездейсоқ шамалар, олардың үлестірім заңдары Х-тің үлестірім заңындай болады. Олай болса:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

кездейсоқ шамасының да үлестірім заңы сондай болады. Бірақ n өскен сайын Х-тің кездейсоқ сипаты бірте-бірте жоғала бастайды да ол А-ға жақындай түседі. Х-тің А-ға жақындағандығының шарттары Чебышев теоремасымен беріледі. Соңымен теореманың мағынасы:

$|X-A|<\varepsilon$ оқиғасы n мейлінше үлкен болғанда ақиқат оқиға болады. Бұл теореманың практикалық маңызы мынада. Бір нәрсені өлшегенде мейлінше дәл нәтиже алу үшін оны бірнеше рет өлшеп содан кейін алған нәтижелердің арифметикалық орташа мәнін алу керек.

4-мысал. Белгілі бір шаманың мәні ретінде мейлінше көп өлшеулердің арифметикалық орташа нәтижесі алынады. Әрбір өлшеудің мүмкін мәндерінің орташа квадраттық ауытқуы 1 сантиметрден аспайды деп қарастырып, 1000 өлшеуде алынған нәтиженің берілген шаманың шын мәнінен ауытқуының абсолют шамасы 0,1 сантиметрден артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Әрбір өлшеудің нәтижесі кездейсоқ шама болады. Сондықтан 1000 өлшеудің нәтижелерін $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ тәуелсіз кездейсоқ шамалар жиынтығы ретінде қарастырамыз. Сонда

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000}}{1000}$$

1000 өлшеудің арифметикалық орташа мәні болады. Ол да кездейсоқ шама болады. Енді өлшеп отырған шаманың шын мәнін a деп қабылдасақ Чебышев теоремасын пайдалануға болады:

$$P\left\{\left|\overline{X} - a\right| \le 0{,}1\right\} \ge 1 - \frac{1}{(0{,}1)^2 \cdot 1000} = 0{,}9$$

Сөйтіп $P\left(\left|\overline{X} - a\right| \le 0{,}1\right) \ge 0{,}9$

5-мысал. Электршамдар салынған 100 жәшіктің әрқайсысынан олардың жану ұзақтығын анықтау үшін бір-бірден шам алынды. Сөйтіп алынған шамдардың арифметикалық орташа жану ұзақтығы есептелінді. Осы арифметикалық орташа жану ұзақтығының жәшіктердегі барлық шамдардың жану ұзақтығының арифметикалық орташа жану ұзақтығынан айырмасының абсолют шамасының 2 сағаттан көп болмауының ықтималдығын бағалау керек. Шамдардың жану ұзақтығының орташа квадраттық ауытқуы 8 сағаттан аспайды.

Шешуі: Кездейсоқ шамаларға белгілеу енгізелік. X_i і-інші жәшіктен алынған электршамның жану ұзақтығы, $M(X_i)$ — әр жәшіктегі шамдардың арифметикалық орташа жану ұзақтығы. Сонда

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}}{100}$$

алынған шамдардың арифметикалық орташа жану ұзақтығы, ал

$$\frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_{100})}{100} = M(\overline{X})$$

барлық шамдардың жану ұзақтығының арифметикалық орташа жану ұзақтығы. Сонымен есептің шарты бойынша мына ықтималдықты бағалау керек:

$$P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| \le 2\right)$$

Қарастырып отырған X_1, Xx_2, ..., X_{100} кездейсоқ шамалар үшін Чебышев теоремасының шарттары орындалады. Олай болса:

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|\leq 2\right)\geq 1-\frac{8}{4\cdot 100}=0{,}98$$

Сөйтіп,

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|\leq 2\right)\geq= 0{,}98$$

6-мысал. Белгілі бір шаманы өлшегенде алынған нәтижелер дисперсиясы 1-ден аспайтын кездейсоқ шама. Осы нәтижелердің арифметикалық орташа мәнінің берілген шаманың шын мәнінен ауытқуының абсолют шамасы 0,01-ден артпауының ықтималдығы 0,98-ден кем болмауы үшін қанша рет өлшеу керек?

Шешуі: Әрбір өлшеу кезінде алынған нәтижелер кездейсоқ шама және олар тәуелсіз. Белгілеу енгізенік.

X_1, X_2, ..., X_n бірінші, екінші, ... , n-ші өлшеулердің нәтижелері. Олай болса олардың арифметикалық орташа мәні де

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$$

кездейсоқ шама. Енді өлшеп отырған шаманың шын мәнін a-деп белгілесек, сонда бұл кездейсоқ шамалар Чебышев теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан

$$P\left(\left|\overline{X}-a\right|<0{,}01\right)\geq 0{,}98.$$

Осыдан мына теңсіздікті аламыз:

$$1-\frac{1}{(0{,}01)^2\cdot n}\geq 0{,}98$$

Соңғы теңсіздікті шешсек $n\geq 5\cdot 10^5$ болатынын көреміз.

7-мысал. Егер тәуелсіз X_1, X_2, ..., X_n кездейсоқ шамалар тізбегі төмендегідей үлестірім заңымен берілсе

X_n	-3n	0	3n
P	$\frac{1}{2^n\cdot n^2}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}\cdot n^2}$	$\frac{1}{2^n\cdot n^2}$

онда осы кездейсоқ шамалар тізбегіне Чебышев теоремасын қолдануға бола ма?

Шешуі: Берілген кездейсоқ шамалар тізбегіне Чебышев теоремасын пайдалану үшін бұл тізбектер екі шартты қанағаттандыру керек:

1. Олар қос-қостан тәуелсіз болу керек.

2. Олардың математикалық үміттері ақырлы болып, дисперсиялары тұрақты бір С санымен шектелген болуы керек.

Берілген кездейсоқ шамалар үшін бірінші шарт орындалады, себебі есептің шарты бойынша олар тәуелсіз кездейсоқ шамалар. Ал екінші шарттың орындалуын тексеру қажет. Әуелі математикалық үміттерді есептейік:

$$M(X_n) = -3n\cdot\frac{1}{2^n n^2} + 3n\cdot\frac{1}{2^n n^2} = 0$$

Енді X_n^2 үшін үлестірім кестесін жазайық.

X_n^2	$9n^2$	0	$9n^2$
P	$\frac{1}{2^n n^2}$	$1-\frac{1}{2^{n-1} n^2}$	$\frac{1}{2^n n^2}$

Осыдан $M(X_n^2) = \frac{9}{2^{n-1}}$,

ақырында $D(X) = \frac{9}{2^{n-1}} \le 9$.

Сонымен $M(X_n)$ ақырлы, ал $D(X_n)$ шектелген болады. Олай болса Чебышев теоремасын пайдалануға болады.

ЕСЕПТЕР

191. Әрбір тәуелсіз 200 кездейсоқ шаманың дисперсиялары 4-тен аспайды. Осы кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасының олардың математикалық үміттерінің арифметикалық орташасынан ауытқуының абсолют шамасы 0,3-тен артпауының ықтималдығын бағалау керек.

192. Жұмыс істеу мерзімін анықтау үшін берілген партиядан кез келген 150 радиошам алынды. Радиошамның жұмыс істеу мерзімінің орташа квадраттық ауытқуы 6 сағаттан аспайды. Алынған 150 радиошамдардың жұмыс істеу мерзімінің орташа мәнінің берілген партиядағы барлық шамдардың жұмыс істеу мерзімінің орташа мунінен айырымының абсолют шамасы 5 сағаттан кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.

193. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі үлестірім қатарымен берілген:

1.

X_n	$-5n$	0	$5n$
P	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

2.

X_n	-2^n	2^n
P	0,5	0,5

Осы кездейсоқ шамалар тізбектеріне Чебышев теоремасын пайдалануға бола ма?

194. Әрбір 300 тәуелсіз кездейсоқ шамалардың дисперсиясы 5-тен аспайды. Осы кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасының олардың математикалық үміттерінің арифметикалық орташасынан ауытқуының абсолют шамасы 3 -тен аспауының ықтималдығын бағалаңыз.

195. Қос-қостан тәуелсіз кездейсоқ шамалардың дисперсиясы 10-нан аспайды. Осы кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасының олардың математикалық үміттерінің арифметикалық орташасынан ауытқуының абсолют шамасы 0,25-тен аспауының ықтималдығы 0,99-дан кем болмауы үшін қанша кездейсоқ шама алыну керек?

196. Қос-қостан тәуелсіз кездейсоқ шамалардың әрқайсысының дисперсиясы 10-нан аспайды. Осындай 16 000 кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташасының олардың математикалық үміттерінің арифметикалық орташасынан ауытқуының абсолют шамасы 0,25-тен артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

197. Берілген шаманың шын мәні – a. Осы шаманың мәнін анықтау үшін өлшеулер жүргізіледі. Осы өлшеулердің арифметикалық орташа мәнінің a-дан ауытқуының абсолют шамасы 2-ден кем болуының ықтималдығы 0,95-ке тең болуы үшін қанша рет өлшеу керек? Әрбір өлшеудің орташа квадраттық ауытқуы 10-нан кіші.

198. Таңдама әдіспен бидай дәндерінің орташа салмағын анықтау керек. Дәндердің салмағының орташа квадраттық ауытқуы белгілі, ол – 0,04. Таңдама әдіспен алынған дәндердің орташа салмағының осы орташа салмақтың математикалық үмітінен (бұл берілген партиядағы дәндердің орташа салмағы) ауытқуының абсолют шамасы 0,01-ден артық болмауы 0,999 ықтималдықтан кем болмауы үшін қанша дән тексерілуі керек?

199. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі үлестірім заңдарымен берілген:

1.

X_n	$-5n$	0	$5n$
P	$\frac{1}{3n^2}$	$1-\frac{1}{3n^2}$	$\frac{1}{3n^2}$

2.

X_n	$-n^2$	0	n^2
P	2^{-n}	$1-2^{1-n}$	2^{-n}

Осы кездейсоқ шамалар тізбегіне Чебышев теоремасын пайдалануға бола ма?

200. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың әрқайсысының дисперсиясы 4-тен аспайды. Осы кездейсоқ шамалардың арифметикалық орташа мәнінің олардың математикалық үміттерінің арифметикалық орташа мәнінен ауытқуының абсолют шамасы 0,5-тен аспауының ықтималдығы 0,99-дан кем болмауы үшін қанша кездейсоқ шама болуы керек?

3. Бернулли теоремасы

Егер әрбір тәуелсіз n сынақтарда А оқиғасы тұрақты p ықтималдықпен m рет пайда болса, онда кез келген n үшін

$$\lim_{n->\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (2.5.6)$$

орындалады.

Бұл теореманы Чебышев теңсіздігін пайдаланып дәлелдегенде төмендегі бағалауды аламыз:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (2.5.7)$$

8-мысал. Оқиға тәуелсіз сынақтарда тұрақты 0,2 ықтималдықпен пайда болады. Оқиғаның 900 сынақтарда пайда болу салыстырмалы жиілігінің осы оқиғаның ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,04-ден кем болатындығының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Есептің шарттары Бернулли теоремасының шаттарымен сәйкес келеді. Сондықтан n=900, p=0,2, q=0,8, ε=0,04 екенін ескеріп, іздеп отырған ықтималдықты бағалау үшін (2.5.7) формуланы пайдаланамыз.

$$P\left(\left|\frac{m}{900}-0{,}2\right|<0{,}04\right)\geq 1-\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{900\cdot 0{,}0016}.$$

Осыдан: $P\geq 0{,}89$.

9-мысал. А оқиғасының тәжірибеде пайда болу ықтималдығы 0,75-ке тең. Осы тәжірибелерде оқиғаның пайда болуы салыстырмалы жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,05-тен артық болмауының ықтималдығы 0,96-ға тең болу үшін қанша тәжірибе жасау керек?

Шешуі: Есептің шарты бойынша

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}75\right|<0{,}05\right)=0{,}96.$$

(2.5.7), формуладан: $1-\frac{0{,}75\cdot 0{,}25}{n\cdot(0{,}05)^2}\geq 0{,}96$

Осыдан: n≥1875.

10-мысал. Зауытта дайындалған бұйымның 90 проценті бірінші сортқа жатады. Тексеруге 600 бұйым алынды. Тексеруге алынған бұйымдардың ішіндегі бірінші сортқа жататын бұйымдардың үлесінің оның ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы ξ-нен кем болуының ықтималдығы 0,99-ға тең болуы үшін бұл ауытқу қандай болуы керек?

Шешуі: Есептің шартын пайдалансақ онда мына теңдікті жазамыз:

$$P\left(\left|\frac{m}{600}-0{,}9\right|<\varepsilon\right)=0{,}99$$

Осыдан:

$$1-\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{600\cdot\varepsilon^2}\geq 0{,}99,$$ немесе ε=0,12.

ЕСЕПТЕР

201. Айталық зауыттан шыққан сағаттың дәл жүру ықтималдығы 0,97-ге тең болсын. Алынған 1000 сағаттың ішінде дәл жүретін сағаттардың үлесі оның ықтималдығынан абсолют шамасы бойынша 0,02-ге ауытқуының ықтималдығын бағалаңыз.

202. Урнада 1000 ақ, 2000 қара шар бар. Урнадан кез келген шар алынып түсі анықталғаннан кейін қайта урнаға салынады. Сөйтіп 300 сынақ жүргізіледі. Осы сынақтарда ақ шардың m рет пайда болуы $80<m<120$ теңсіздігін қанағаттандыратынның ықтималдығын бағалаңыз.

203. Фабрикада шығарылған бұйымның сапасыз болуының ықтималдығы 0,015-ке тең. Шығарылған бұйымдардың ішіндегі сапасыз бұйымдар үлесінің оның ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,005-тен аспауының ықтималдығы 0,807-ден артық болмауы үшін қанша бұйым алу керек?

204. Даярланған радиошамдардың сапасын тексергенде олардың 95 проценті берілген Т уақыттан кем жұмыс жасайды екен. Алынған 500 радиошамдардың ішінде берілген Т уақыттан кем жұмыс жасайтын радиошамдардың үлесінің оның ықтималдығынан айырмасының абсолют шамасы 0,02-ден артпауының ықтималдығын бағалаңыз.

205. Ойын кубын лақтырғанда 5 үпай жинаудының салыстырмалы жиілігі мына интервалда $[(\frac{1}{6}-0,05], (\frac{1}{6}+0,05]]$ жатуы 0,99 ықтималдықтан кем болмауы үшін ойын кубын қанша рет лақтыру қажет?

206. Әрбір сынақтың жақсы нәтиже беру ықтималдығы 0,8-ге тең. 1000 тәуелсіз сынақта жақсы нәтиже беретін сынақтардың салыстырмалы жиілігінің оның әрбір сынақта пайда болу ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,05-тен кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.

207. Ойын кубы 1000 рет лақтырылды. Осы сынақтарда 6 үпай пайда болуының салыстырмалы жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,01-ден кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.

208. Берілген партиядағы жарамды детальдардың үлесі 98 процент екені белгілі болса, осы партияны тексергенде жарамды детальдардың пайда болуының салыстырмалы жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,02-ден кем болуының ықтималдығы 0,96-дан кем болмауы үшін қанша детальді тексеру керек?

Сонымен үлкен сандар заңы – тәжірибелердің саны көбейген сайын алынған нәтижелердің арифметикалық орташа нәтижесі тұрақты санға ұмтылатындығының шарттарын анықтайтын теоремалар жиыны болып табылады.

Сондай-ақ ықтималдықтар теориясында орталық шекті теоремалардың да маңызы зор. Бұл теоремаларда қалыпты үлестіру заңын қолдану шарттары қарастырылады. Егер қарастырып отырған кездейсоқ шаманы өзара тәуелсіз мейлінше көп кездейсоқ шамалардың қосындысы ретінде жазуға болатын болса (ал әрбір қосылғыштың қосындыға әсері аз болса), онда берілген кездейсоқ шама *қалыпты үлестіріммен* беріледі деп қарастыруға болады. А. М. Ляпуновтың орталық ақырлы теоремасының мәні осында болып табылады.

III тарау. НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР. ТАҢДАМАЛЫҚ ТӘСІЛ

Математикалық статистикада дискретті немесе үзіліссіз сандық сипатты белгі X, яғни осы белгінің мүмкін мәндерінен тұратын бас жинақ зерттелінеді. Оның бас орташа, бас дисперсия т.с.с. сандық сипаттамаларын табу мәселесі практикалық қажеттіліктен туындайды.

Алайда, көп жағдайда бас жинақты толық анықтау мүмкін емес, немесе оны анықтау көп жағдайда тиімсіз болады. Сондықтан, осы бас жинақтан варианталар деп аталынатын $x_1, x_2, \ldots, x_k$ элементтерінен тұратын жиынша кездейсоқ теріліп алынады. Бұл жиыншада x_1 вариантасы n_1 рет, x_2 вариантасы n_2 рет, т.т., x_k вариантасы n_k рет қайталануы мүмкін. Онда осы жиынша былай жазылады:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Оны вариациялық қатар түрінде жазылған *таңдама* дейміз.

Мұндағы n_i-x_i вариантаның жиілігі деп, ал $n=\sum_{i=1}^{n} n_i$ таңдаманың көлемі деп аталады.

Енді осы таңдаманың сандық сипаттамалары арқылы бас жинақты зерттеуге болады. Осы таңдамалық тәсіл – математикалық статистиканың негізгі тәсілі болып табылады. [15].

~~§ 1. Таңдаманың сипаттамалары~~

а) Эмпирикалық функция.

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}. \tag{3.1.1}$$

Мұнда n_x x-тан кіші болатын варианталардың жиіліктерінің қосындысы. Таңдаманың көлемі үлкен болғанда, осы функция арқылы бас жинақтың белгісіз интегралдық үлестірім функциясы F(x)-ты жуықтап табуға болады.

б) Жиіліктер полигоны.

Жазықтықтағы координаталары (x_1,n_1), (x_2,n_2),..., (x_k,n_k) нүктелерін қосатын кесінділерден тұратын қисық *сызық полигон* деп аталады.

в) Таңдамалық орташа.

$$\overline{X}_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}. \qquad (3.1.2)$$

г) Таңдамалық дисперсия.

$$D_T = \frac{\Sigma n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} = \frac{\Sigma n_i x_i^2}{n} - (\bar{x}_T)^2. \qquad (3.1.3)$$

д) Таңдамалық орташа квадраттық ауытқу.

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad 3.1.4)$$

е) *к*-шы ретті бастапқы эмпирикалық момент.

$$M_к = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}, \ к=1,2,3,... \qquad (3.1.5)$$

ж) *к*-шы ретті орталық эмпирикалық момент.

$$m_к = \frac{\sum n_i (x_i - x_T)^k}{n} \quad к=1,2,3,... \qquad (3.1.6)$$

з) Таңдамалық асимметрия.

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3}. \qquad (3.1.7)$$

и) Таңдамалық эксцесс.

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3. \qquad (3.1.8)$$

1-ескерту. Егер x_i варианталары үлкен сандар болса, жоғарыдағы (3.1.2) және (3.1.3) формулаларын тікелей пайдаланбай, $u_i = x_i - C$ деген шартты варианталарға көшіп, мына формулаларды пайдаланған ыңғайлы болады:

$$\overline{X}_T = \frac{\sum n_i u_i}{n} + C \qquad (3.1.9)$$

$$D_T(x) = D_T(u) = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i u_i}{n}\right)^2 \qquad (3.1.10)$$

Мұндағы С – "жалған нөл" деп аталатын сан, оны өзіміз жиілігі ең үлкен варианталарына шамалас етіп таңдаймыз.

1-мысал. Таңдама мына вариациялық қатар түрінде берілген:

x_i	1	4	5
n_i	4	4	2

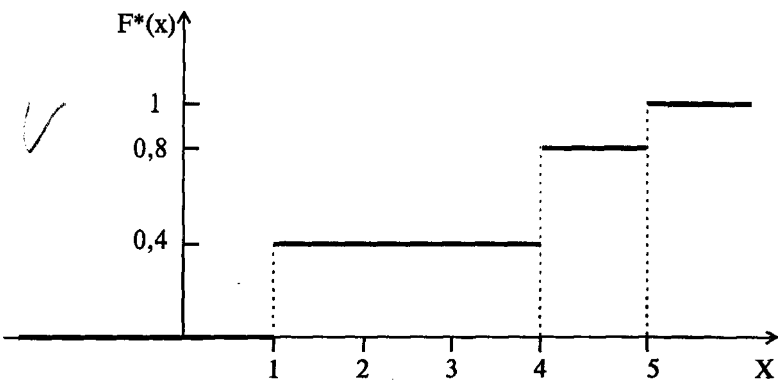
Барлық сипаттамаларын табыңыз.

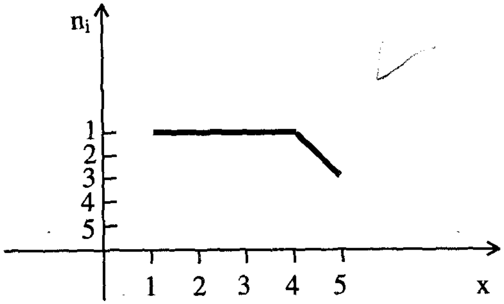
Шешуі: x_i варианталары кішкене сандар болғандықтан (3.1.1)–(3.1.8) формулаларын тікелей қолданамыз.

а) Таңдаманың көлемі n=10 және $x \le 1$ болса $n_x=0$ (1-ден кіші варианталар жоқ), демек $F^*(x)=0$, ал $x<4$ болса $n_x = 4$, $F^*(x)=0{,}4$, т.с.с. есептеулер жүргізіп мына функцияны табамыз:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } -\infty < x \le 1 \\ 0{,}4, & \text{егер } 1 < x \le 4 \\ 0{,}8, & \text{егер } 4 < x \le 5 \\ 1, & \text{егер } 5 < x < +\infty \end{cases}$$

Осы функцияның графигі төмендегідей болғандықтан, эмпирикалық функцияны баспалдақ тәріздес функция деп атау орынды.





б) Жиіліктер полигоны төмендегідей қисық болады:

в) $\bar{x}_T = \dfrac{4\cdot 1 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5}{10} = 3$

г) $D_T = \dfrac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{10} - 9 = 2{,}8$

д) $\sigma_T = \sqrt{2{,}8} \approx 1{,}67$

е) $M_1 = \bar{x}_T,\, M_2 = \dfrac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{10} = 11{,}8$

ж) $m_1 = 0, \qquad m_2 = D_T$

$$m_3 = \frac{4\cdot(1-3)^3 + 4\cdot(4-3)^3 + 2\cdot(5-3)^3}{10} = -1{,}2$$

$$m_4 = \frac{4\cdot(1-3)^4 + 4\cdot(4-3)^4 + 2\cdot(5-3)^4}{10} = 1{,}0$$

з) $a_s = -\dfrac{1{,}2}{(1{,}67)^3} = -0{,}26$

и) $e_k = \dfrac{10}{7{,}84} - 3 = -1{,}72$

2-мысал. Берілген вариациялық қатар арқылы $\bar{x}_T$ мен D_T-ны табыңыз.

x_i	3860	3900	3910	3913
n_i	2	13	4	1

Шешуі: Варианталар үлкен сандар, сондықтан С=3900 деп алып, $u_i=x_i-C$ шартты варианталарға көшейік, яғни шартты вариациялық қатар аламыз.

U_i	-40	0	10	13
n_i	2	13	4	1

Сонда (3.1.9), (3.1.10) формулаларын пайдалансақ:

$$x_T=\frac{2\cdot(-40)+4\cdot 10+1\cdot 13}{20}+3900=3898{,}65$$

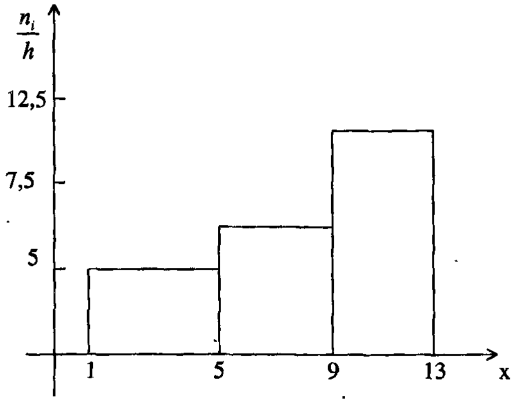
$$D_T=\frac{2\cdot 1600+4\cdot 100+1\cdot 169}{20}-\left(\frac{-80+40+13}{20}\right)^2=186{,}63$$

2-ескерту. Егер сандық сипаты белгі X үзіліссіз таралған болса, оның бақыланған мәндері кіретін интервалды ұзындықтары h болатындай бірнеше кіші интервалдарға бөліп, әрбір бөлікте жататын варианталардың жиіліктерінің қосындысы n_i анықталады. Сонда табаны $(x_i;x_{i+1})$ кіші интервал, ал биіктігі $\frac{n_i}{h}$ болатын тіктөртбұрыштардан құралған фигураны – *гистограмма* дейміз.

3-мысал. **Мына таңдаманың гистограммасын құрыңыз**

Интервал нөмірі	Кіші интервалдар	Варианталардың жиіліктерінің қосындысы	Жиіліктер тығыздығы
i	$(x_i\,;\,x_{i+1})$	n_i	n_i/h
1	(1 ; 5)	20	5
2	(5; 9)	30	7,5
3	(9; 13)	50	12,5

Шешуі: Абциссалар өсінде ұзындықтары 4 болатын берілген интервалдарды саламыз. Енді табандары осы интервалдар, ал биіктіктері $\frac{n_i}{h}$ болатын, тіктөртбұрыштарды саламыз.



Гистограмманың ауданы n кв. өлшем бірлігіне тең болады

§ 2. Варианталары біркелкі орналасқан таңдамалар. Көбейтінділер тәсілі

Таңдамадағы варианталар біркелкі орналассын. Яғни қадам $h=x_2-x_1=x_3-x_2=...=x_k-x_{k-1}$ тұрақты сан болсын. Бұл жағдайда "жалған нөл" – С ретінде жиілігі ең үлкен болатын вариантаны алып, одан кейін $u_i=(x_i-C)/h$ шартты варианталарына көшіп, мынадай шартты моменттерді анықтаймыз:

$$M_k{}^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n}; \; k=\overline{1,4}, \qquad (3.2.1)$$

сонда

$$\bar{x}_T = M_1^* \cdot h + c;$$

$$e_k = \frac{[M_4^* - 4M_1^* \cdot M_3^* + 6(M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3(M_1^*)^4] \cdot h^4}{\sigma_T^4} - 3; \qquad (3.2.2)$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)] \cdot h; \quad a_s = \frac{[M_3^* - 3M_1^* \cdot M_2^* + 2(M_1^*)^3] \cdot h^3}{\sigma_T^3}. \qquad (3.2.3)$$

Осы тәсілді көбейтінділер тәсілі дейміз.

4-мысал. Мына таңдаманың сандық сипаттамаларын табыңыз.

x_i	8	18	28	38	48	58
n_i	5	2	3	71	9	10

Шешуі: n=100; h=10; C=38 екені түсінікті. Енді мынадай есептеу кестесін құрамыз.

X_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$
8	5	-3	-15	45	-135	405
18	2	-2	-4	8	-16	32
28	3	-1	-3	3	-3	3
38	71	0	0	0	0	0
48	9	1	9	9	9	9
58	10	2	20	40	80	160
			$\Sigma=7$	$\Sigma=105$	$\Sigma=-74$	$\Sigma=609$

яғни $M_1^* = 0{,}07;\ \ M_2^* = 1{,}05;\ \ M_3^* = -0{,}04;\ \ M_4^* = 6{,}09;$

Олай болса (3.2.2)–(3.2.3) формулалар бойынша

$$\bar{x}_T = 0{,}07 \cdot 10 + 38 = 38{,}7;$$

$$D_T = [1{,}05 - (0{,}07)^2] \cdot 100 = 104{,}51;$$

$$\sigma_T = \sqrt{104{,}51} \approx 10{,}22$$

$a_s = -0{,}89$, $e_k = 8{,}59$.

Жоғарыда қарастырылған 1–4 мысалдарда таңдама вариациялық қатар арқылы берілген. Көбінесе таңдама жалпы түрде беріледі. Төменде таңдама жалпы түрде берілген жағдайда интегралдық функция, сандық сипаттамалар қалай анықталатындығына мысал келтірілген.

5-мысал. Сандық сипатты белгінің бақыланған мөндері төмендегі кестемен берілген.

01	00	25	18	04	14	25	14	16	08
09	11	16	04	11	12	14	21	20	12
09	12	18	25	22	21	20	11	01	22
03	04	18	22	09	14	12	02	08	19
01	15	11	24	12	10	09	16	09	14
24	12	16	16	09	06	07	08	12	16
16	16	19	14	11	07	21	20	11	12
09	20	13	14	13	14	09	13	16	17
12	11	19	06	06	14	21	18	12	16
06	11	02	08	06	14	14	13	15	09

1. Интервалдық вариациялық қатарды жаз. Салыстырмалы жиіліктер гистограммасын сал.

2. Дискретті вариациялық қатарды жаз. Салыстырмалы жиіліктер полигонын сал.

3. Үзіліссіз вариациялық қатардың эмпирикалық үлестірім функциясын тап. Графигін сал.

4. Дискретті вариациялық қатардың эмпирикалық үлестірім функциясын тап. Графигін тұрғыз.

5. Дискретті вариациялық қатардың сандық сипаттамаларын тап.

Шешуі: 1. Сандық сипатты белгінің бақыланған мәндері [0;25] аралығында жатыр. Енді h=5 деп алып осы аралықты кіші интервалдарға бөлсек, сонда интервалдық вариациялық қатар мына түрде жазылады:

3.1-кесте

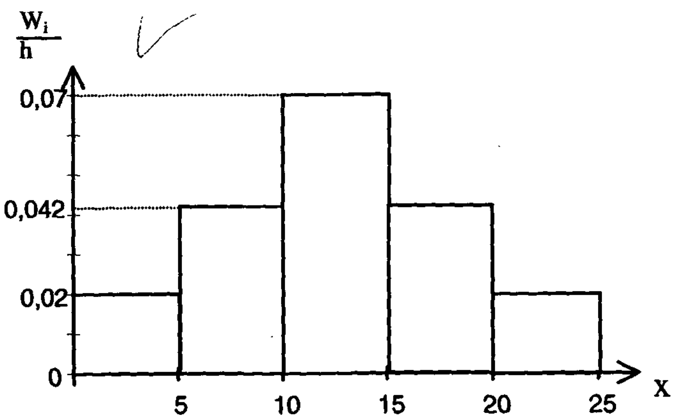
x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	10	21	35	22	12

Салыстырмалы жиіліктер гистограммасын салу үшін мына интервалдық қатарды қолданамыз:

3.2-кесте

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
$\frac{W_i}{h}$	0,02	0,042	0,07	0,044	0,024

Салыстырмалы жиіліктер гистограммасын саламыз.



3.1-сурет

2. Дискреттi вариациялық қатарды жазу үшiн x_i орнына кiшi интервалдардың ортасын аламыз.

3.3-кесте

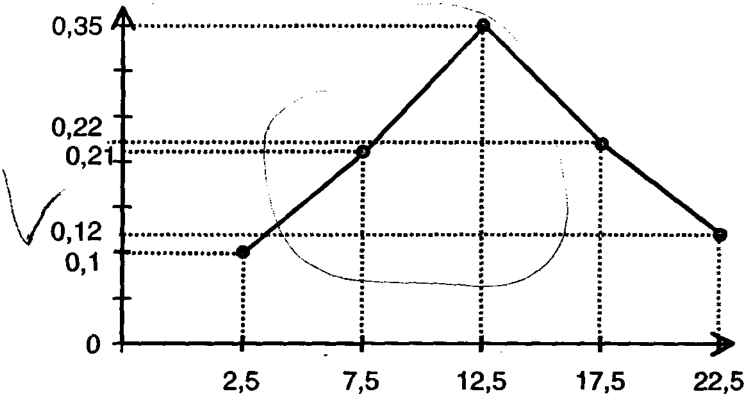
x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
n_i	10	21	35	22	12

Ендi салыстырмалы жиiлiктер полигонын салу үшiн мына дискреттi қатарды пайдаланамыз:

3.4-кесте

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
W_i	0,1	0,21	0,35	0,22	0,12

Полигонды тұрғызалық.



3.2-сурет

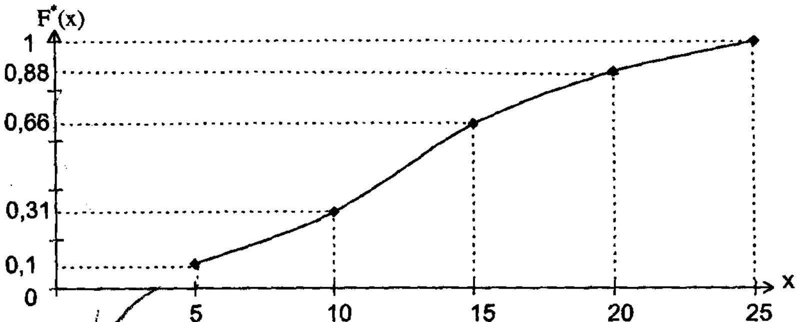
3. Интервалдық вариациялық қатардың эмпирикалық үлестiрiм функциясының графигiн тұрғызу үшiн қосылған салыстырмалы жиiлiктер арқылы интервалдық вариациялық қатарды жазамыз.

x_i	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
қосылған салыстырмалы жиiлiк	0,1	0,31	0,66	0,88	1

Сонда:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & x=0\\0{,}1 & x=5\\0{,}31 & x=10\\0{,}66 & x=15\\0{,}88 & x=20\\1 & x\geq 25\end{cases}$$

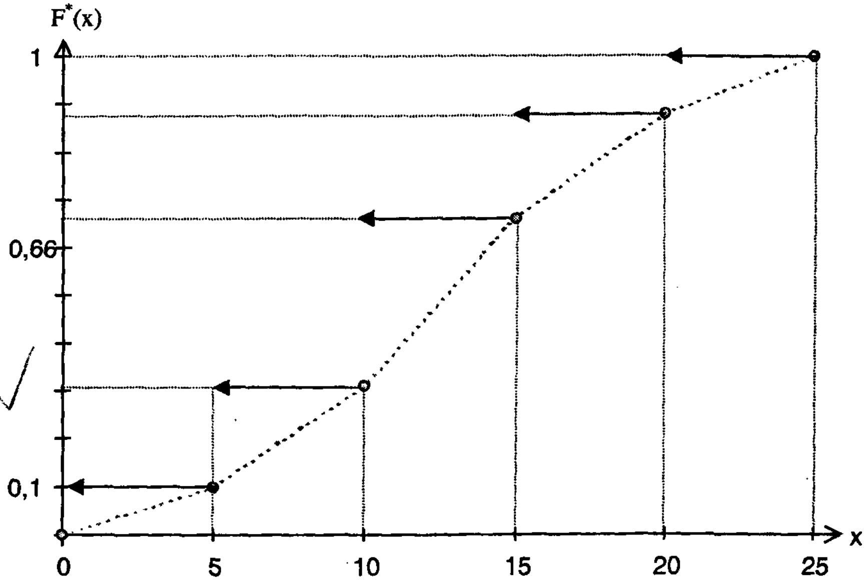
Енді $F^*(x)$-тің графигін (кумулятивтік қисық) тұрғызамыз.



4. Ал дискретті вариациялық қатар үшін эмпирикалық үлестірім функциясы:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & -\infty\leq x<0\\0.1 & 0\leq x<5\\0.31 & 5\leq x<10\\0.66 & 10\leq x<15\\0.88 & 15\leq x<20\\1 & 20\leq x<\infty\end{cases}$$

Бұл функцияның графигі:



5. Дискретті вариациялық қатардың сандық сипаттамаларын 3.3-кестені пайдаланып табамыз. Үшінші кестеден дискретті қатардың варианталары біркелкі орналасқандығы байқалады. Сондықтан сандық сипаттамаларды есептеу үшін 3.2.1–3.2.3 формулаларын қолданамыз: $n = 100$, $h = 5$, $u_i = \dfrac{x_i - 12{,}5}{5}$, $c = 12{,}5$.

6.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$
2.5	10	-2	-20	40	-80	160
7.5	21	-1	-21	21	-21	21
12.5	35	0	-	-	-	-
17.5	22	1	22	22	22	22
22.5	12	2	14	48	96	192
$\frac{\sum}{n}$	0.10	0	0.05	1.31	0.17	3.65

Осыдан:

$\bar{x}_T = 0{,}05 \cdot 5 + 12{,}5 = 12{,}75$

$D_T = [1{,}31 - (0{,}05)^2] \cdot 25 = 32{,}6875$

$\sigma_T = \sqrt{32{,}6875} = 5{,}72$

$$a_S = \frac{[0{,}17 - 3 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}31 + 2 \cdot (0{,}05)^3] \cdot 125}{5{,}72} = -0{,}018$$

$E_k = -0{,}8733$

Сондай-ақ, $M_0 = 12{,}5$, $M_D = 12{,}5$.

ЕСЕПТЕР

209. 100 шағын дүкендерде сатылған тауарлардың күндік орташа көлемі (мың теңге) мына кестемен берілген.

33	34	33.5	36.5	34.5	35	34.5	34	34.5	35
35	35.5	35.5	35	35.5	35	35.5	37	35	35.5
35	35	35.5	35.5	35	35	35	35	35.5	36.5
35.5	35.5	35.5	35.5	35	38.5	37.5	37.5	34.5	34
34	34	33.5	37.5	38.5	36	36	36	36	36
36	36	36	36	36	36	36	36	36.5	36.5
36.5	36.5	36.5	36.5	36.5	36.5	36.5	36.5	36.5	36
36	36	38	36	38	37	37	37	37.5	37.5
37.5	37.5	37.5	37.5	37.5	37.5	37.	37	37.5	37
37	37.5	38.5	37.5	37	37.5	37.5	38	38.5	38.5

1. Интервалдық вариациялық қатарды жазыңыз. Салыстырмалы жиіліктер гистограммасын салыңыз.

2. Дискретті вариациялық қатарды жазыңыз. Салыстырмалы жиіліктер полигонын салыңыз.

3. Үзіліссіз вариациялық қатардың эмпирикалық функциясын жазыңыз. Графигін салыңыз.

4. Дискретті вариациялық қатардың эмпирикалық функциясын жазыңыз. Графигін салыңыз.

5. Дискретті вариациялық қатардың сандық сипаттамаларын табыңыз.

210. Мына таңдаманың сипаттамаларын және эмпирикалық функциясын табыңыз.

x_i	-1	1	2	3
n_i	3	4	2	1

211. Берілген таңдаманың дисперсиясын табыңыз.

x_i	2570	2590	2600	2640	2650
n_i	2	3	10	4 1	

212. Берілген таңдаманы орташасы мен дисперсиясын табыңыз.

x_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

213. Мына таңдаманың асимметриясын табыңыз.

x_i	10	20	30	40	50	60	70
n_i	5	15	50	16	4	5	5

214. Мына таңдаманың сипаттамаларын және эмпирикалық функциясын табыңыз.

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

215. Таңдаманың берілген таралуы арқылы а) жиіліктер гистограммасын салыңыз, б) дискретті вариациялық қатарды жазыңыз, в) эмпирикалық функциясын табыңыз.

Интервал нөмірі	Кіші интервалдар	Жиіліктер қосындысы	Жиіліктер тығыздығы
i	$(x_i\ ;\ x_{i+1})$	n_i	$n_i\,/h$
1	(2 ; 7)	5	1
2	(7; 12)	10	2
3	(12; 17)	25	5
4	(17; 22)	6	6/5
5	(22; 27)	4	4/5

216. Таңдаманың орта мәні мен дисперсиясын табыңыз.

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

217. Төменде доллардың Алматы қаласындағы 1999 ж. валюта алмастыру орындарындағы бағасы көрсетілген.

Доллар бағасы	87–87,1	87,1–87,2	87,2–87,3	87,3–87,4	87,4–87,5	87,5–87,6	87,6–87,7	87,7–87,8	87,8–88
алмастыру орындарының саны	5	8	12	20	25	15	8	4	3

Таңдама орташасын және дисперсиясын табыңыз.

218. 60 шағын дүкенде күндік тауар сату көлемі (мың теңге)-мына кестемен берілген.

50	57	55	62	51	63	64	60	61	72
56	55	63	64	61	71	73	74	71	64
57	61	58	63	59	62	64	69	51	63
64	66	67	68	57	58	59	60	52	56
65	67	69	67	66	63	61	69	53	58

1. Интервалдық вариациялық қатарды жаз. Салыстырмалы жиіліктер гистограммасын сал.
2. Дискретті вариациялық қатарды жаз. Салыстырмалы жиіліктер полигонын сал.
3. Үзіліссіз вариациялық қатардың эмпирикалық функциясын тап. Графигін сал.
4. Дискретті вариациялық қатардың эмпирикалық функциясын тап. Графигін сал.
5. Дискретті вариациялық қатардың сандық сипаттамаларын тап.

IV тарау. ҮЛЕСТІРІМ ПАРАМЕТРЛЕРІН БАҒАЛАУ

Дискретті немесе үзіліссіз сандық сипатты белгі X-ың үлестірімінің белгісіз параметрін Θ деп белгілейік. Оның таңдама арқылы табылатын нүктелік бағасы Θ^* болсын. Әртүрлі таңдамалар үшін өзгеріп отыратындықтан Θ^* - кездейсоқ шама болады.

1-анықтама. Егер $M(\Theta^*)= \Theta$ болса, онда Θ^* жылжымаған баға деп аталады, ал басқа жағдайда жылжыған баға деп аталады.

2-анықтама. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta-\theta^*|<\varepsilon)=1$ болса, онда Θ^* орнықты баға деп аталады, бұл жерде n – таңдама көлемі.

§ 1. Таңдама арқылы бірден табылатын нүктелік бағалар

1-сөйлем. Бас орташаның жылжымаған және орнықты нүктелік бағасы таңдамалық орташа болады.

2-сөйлем. Бас дисперсияның жылжыған бағасы таңдамалық дисперсия болады, ал жылжымаған бағасы түзетілген таңдамалық дисперсия s^2 болады, мұнда $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_T$, n — таңдама көлемі.

1-мысал. Бас жинақтан мынадай таңдама алынған.

x_i	4	5	7
n_i	10	5	5

а) бас орташаның жылжымаған бағасын табыңыз;

б) бас дисперсиясының жылжымаған және жылжыған бағаларын табыңыз.

Шешуі: а) Таңдамалық орташа жылжымаған баға болады.

$$\bar{x}_T = \frac{4 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 5}{20} = 5$$

б) Жылжыған баға ретінде D_T, ал жылжымаған баға ретінде s^2 алынады:

$$D_T = \frac{4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 5 + 7^2 \cdot 5}{20} - 25 = 1{,}5, \quad s^2 = \frac{20}{19} \cdot 1{,}5 = 1{,}58$$

§ 2. Моменттер әдісі

Бұл әдіс бастапқы және орталық эмпирикалық моменттер өздеріне сәйкес бастапқы және орталық теориялық моменттердің орнықты бағалары болатындығына негізделген. Осы сәйкес моменттерді бір-біріне теңестіре отырып, үлестірімнің белгісіз параметрінің нүктелік бағалауларын табуға болады.

1-мысал. Көрсеткіштік үлестірімнің $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0)$ белгісіз параметрі λ-ның нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Бастапқы І-ші ретті эмпирикалық және теориялық моменттерді теңестіреміз.

$\nu_1 = M_1$

Көрсеткіштік үлестірімнің бірінші ретті бастапқы моменті

ν_1=M(x)=$\frac{1}{\lambda}$, ал $M_1=\overline{x}_T$ болғандықтан $\frac{1}{\lambda}=\overline{x}_T$ теңдігін аламыз.

Осыдан белгісіз параметр λ-ның нүктелік бағасы $\lambda^*=\frac{1}{\overline{x}_T}$ тең.

2-мысал. Берілген таңдама бойынша моменттер әдісін қолданып қалыпты үлестірімнің

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

белгісіз a және σ параметрлерінің нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Бұл жағдайда екі a және σ белгісіз параметр болғандықтан бірінші, екінші ретті теориялық және эмпирикалық моменттерді теңестіреміз.

$\nu_1=M_1$, $\mu_2=m_2$.

Ары қарай ν_1=M(x)=a, μ_2=D(x)= σ^2 және $M_1=\overline{x}_T$, $m_2=D_T$ екенін ескерсек, онда мынадай нүктелік бағалар аламыз:

$a^*=\overline{x}_T$, $\sigma^*=\sqrt{D_T}$.

3-мысал. Берілген таңдаманың сипаттамалары арқылы моменттер әдісімен бірқалыпты үлестірімнің

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\overline{\in}[a;b]\end{cases}$$

белгісіз a және b параметрлерінің нүктелік бағаларын табыңыз.

Шешуі: Бірінші және екінші ретті эмпирикалық моменттерді теориялық моменттерге теңестірейік, яғни $\nu_1=M_1$, $\mu_2=m_2$.

Сонда ν_1=M(x)=$\frac{a+b}{2}$, μ_2=D(x)=$\frac{(b-a)^2}{12}$, $M_1=\overline{x}_T$, $m_2=D_T$ екенін ескерерін мынадай теңдеулер системасын аламыз:

$$\begin{cases}\frac{a+b}{1}=\overline{x}_T\\ \frac{(b-a)^2}{12}=D_T\end{cases}$$

Осы системаны шеше отырып, $a^*=\bar{x}_T-\sqrt{3D}_T$, $b^*=\bar{x}_T+\sqrt{3D}_T$ нүктелік бағаларын табамыз.

§ 3. Неғұрлым шындыққа ұқсас әдіс

1. X – дискретті кездейсоқ шамасы болып, $P(X=x_i)=p(x_i;\theta)$ болсын, $i=\overline{1,n}$; θ – белгісіз параметр.

Анықтама. X кездейсоқ шамасының шындыққа ұқсас функциясы деп

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=p(x_1,\theta)p(x_2,\theta)...p(x_n,\theta) \qquad (4.3.1)$$

функциясын айтады.

Сонда Θ белгісіз параметрінің нүктелік бағасы ретінде (4.3.1) функциясына максимум әперетін $\Theta^*=\Theta^*(x_1, x_2,..., x_n)$ мәнін аламыз, бұл баға неғұрлым шындыққа ұқсас баға деп аталады.

Ескерту: Есеп шығарған кезде lnL функциясын максимумге зерттеген ыңғайлы болады, себебі L және lnL функциялары Θ-нің бір мәнінде максимумге жетеді.

1-мысал. Ең үлкен шындыққа ұқсас әдіспен биномды үлестірімнің

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

p-параметрін бағалаңыз.

Шешуі: Шындыққа ұқсас L функциясын жазайық.

$$L=P_{n1}(k_1)\,P_{n2}(k_2)=C_{n1}^{k1}C_{n2}^{k2}\;p^{k_1+k_2}(1-p)^{n_1+n_2-k_1-k_2}. \qquad (4.3.2)$$

Мұнда $\Theta=p$, $x_1=k_1$, $x_2=k_2$, $x_3=n_1$, $x_4=n_2$.

Жоғарыда айтылған ескертуге сәйкес мына функцияны максимумге зерттейміз.

$$\ln L=\ln(C_{n_1}^{k_1}\;C_{n_2}^{k_2})+(k_1+k_2)\ln p+(n_1+n_2-k_1-k_2)\ln(1-p) \qquad (4.3.3)$$

(4.3.3) функциясын бір белгісіз p-дан тәуелді функция ретінде қарастыра отырып, осы функцияның максимум нүктесін табамыз.

Сонда $p^*=(k_1+k_2)/(n_1+n_2)$ мәнін p параметрінің нүктелік бағасы етіп алуға болатынына көзіміз жетеді.

2. X – үзіліссіз кездейсоқ шама болсын, ал $f(x,\Theta)$ белгісіз параметр Θ-дан тәуелді үлестірім тығыздығы дейік.

Бұл жағдайда шындыққа ұқсас функцияны мына формуламен анықтаймыз:

$$L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) = f(X_1, \theta) f(X_2, \theta) ... f(X_n, \theta) \qquad (4.3.4)$$

Енді (4.3.4) функциясына максимум әперетін $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ нүктесін белгісіз Θ параметрінің нүктелік бағасы болады.

2-мысал. Көрсеткіштік үлестірімнің

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ (0 < x < \infty) \qquad (4.3.5)$$

белгісіз λ параметрінің нүктелік бағасын табыңыз.

Шешуі: Шындыққа ұқсас функцияны құрамыз:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} ... \lambda e^{-\lambda x_n} \qquad (4.3.6)$$

Сонда

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda(x_1 + x_2 + ... + x_n). \qquad (4.3.7)$$

Енді осы (4.3.7) функциясын максимумге зерттесек $\lambda = n/(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{\bar{x}_T}$ сын нүктесі максимум нүктесі болатынына көз жеткіземіз.

Яғни, λ белгісіз параметрінің нүктелік бағасы ретінде

$$\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_T}$$

шамасын алуға болады.

3-мысал. Мына қалыпты үлестірімнің

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (-\infty < x + \infty)$$

белгісіз a және σ параметрлерінің нүктелік бағаларын табыңыз.

Шешуі: Шындыққа ұқсас функция құрамыз:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n \left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4.3.8)$$

Мұндағы $x_1, x_2, ..., x_n$ – таңдамадағы варианталар. Енді lnL функциясын табайық.

$$\ln L = -n \cdot \ln \sigma - n \cdot \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{2\sigma^2} \qquad (4.3.9)$$

(4.3.9) функциясын екі айнымалыдан тәуелді функция ретінде қарап, максимумге зерттейміз:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - an}{\sigma^2} = 0 \qquad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{\sigma^3} = 0$$

(4.3.10) жүйесін шешіп

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}_T,$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_T)^2}{n}} = \sqrt{D_T}$$

нүктелік бағаларын табамыз. Мұнда бірінші баға жылжымаған, ал екіншісі жылжыған баға болады.

§ 4. Интервалдық бағалар

Бір санмен ғана анықталатын нүктелік баға, таңдаманың көлемі аз болғанда, өрескел қатеге соқтыруы мүмкін, сондықтан бас жинатың белгісіз параметрінің интервалдық бағасын, яғни осы θ параметрі жататындай (α,β) интервалын белгілі бір сенімділікпен айқындау мәселесін қарастырайық.

1-анықтама. θ параметрінің θ^* бағасы бойынша сенімділігі (сенімділік ықтималдығы) деп $|\theta-\theta^*|<\delta$ теңсіздігінің орындалу ықти-малдығы γ-ны айтады, яғни $P(|\theta-\theta^*|<\delta)=\gamma$, бұл жерде δ-бағаның дәлдігі.

2-анықтама. $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$ – интервалын γ сенімділігімен алынған сенімділік интервалы деп атайды.

1-сөйлем. Қалыпты үлестіріммен берілген сандық сипатты белгі X шаманың белгісіз *a* математикалық үмітін таңдамалық орташа

$\bar{x}_T$ арқылы γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай сенімділік интервалдарын аламыз.

а) Егер s — бас орташа квадраттық ауытқу белгілі болса, онда

$$\bar{x}_T - t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (4.4.1)$$

t-саны $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$ -ға тең болатындай сан, оны Лаплас функциясының мәндер кестесінен аламыз.

б) Егер σ — белгісіз болса, онда:

$$\bar{x}_T - t\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}. \qquad (4.4.2)$$

Мұнда S — түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқу $t_\gamma = t(\gamma, n)$ — шамасы кестеден анықталады.

2-сөйлем. Қалыпты үлестіріммен берілген X-тың бас орташа квадраттық ауытқуы σ-ны берілген γ сенімділігімен бағалау үшін мынадай сенімділік интервалдарын аламыз.

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q)\ ,\ \text{егер}\ q<1 \qquad (4.4.3)$$

$$0 < \sigma < s(1+q)\ ,\ \text{егер}\ q>1 \qquad (4.4.4)$$

Бұл жерде $q=q(n,\gamma)$ — кестеден алынады.

1-мысал. Бас орташа квадраттық ауытқуы $\sigma = 5$ болатын қалыпты үлестіріммен берілген бас жинақтан алынған көлемі n=25 таңдамадан $\bar{x}_T = 17$ табылды. Бас жинақтың белгісіз математикалық үмітін $\gamma = 0{,}99$ сенімділігімен бағалайтын интервалын табыңыз.

Шешуі: (4.4.1) формуласын пайдаланамыз. Мұнда $\dfrac{\gamma}{2} = \Phi(t) = 0{,}495$. Демек кестеден t=2,57, яғни

$$17 - 2{,}57\cdot\frac{5}{\sqrt{25}} < a < 17 + 2{,}57\cdot\frac{5}{\sqrt{25}}.$$

Осыдан $14{,}43 < a < 19{,}57$ сенімділік интервалы шығады.

2-мысал. Әлдебір физикалық шама бір құралмен 10 рет өлшенеді. Өлшеулердің кездейсоқ қателерінің түзетілген орташа квадраттық ауытқуы 0,5-ке тең. Өлшеу құралының дәлдігін $\gamma=0,99$ сенімділігімен табыңыз.

Шешуі: Құралдың дәлдігі өлшеуде жіберілген кездейсоқ қателердің бас орташа квадраттық ауытқуымен сипатталады, яғни бізге σ-ны бағалайтын сенімділік интервалын табу керек.

$\gamma=0,99$, $n=10$ болса, кестеден $q=1,08$, (4.4.4) формуласын пайдалана отырып $0<\sigma<1,04$ дәлдікті анықтайтын сенімділік интервалын табамыз.

ЕСЕПТЕР

219. Берілген таңдама арқылы бас орташаның жылжымаған бағасын табыңыз.

X_i	3	6	9	12
n_i	15	18	12 5	

220. Берілген таңдама арқылы бас дисперсияның жылжыған және жылжымаған бағаларын табыңыз.

X_i	5	12	13	15	20
n_i	12	15	20	40	13

221. X кездейсоқ шамасы Пуассон үлестіріммен берілген

$$P_m(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

моменттер әдісімен белгісіз параметр λ-ның нүктелік бағасын табыңыз.

222. Моменттер әдісімен геометриялық үлестірімнің $P(x=m)=(1-p)^{m-1}\cdot p$ параметрі р-ның нүктелік бағасын табыңыз.

223. Моменттер әдісімен Гамма үлестірімнің

$$f(x)=x^{\alpha}e^{-x/\beta}/(\beta^{\alpha+1}\partial(\alpha+1)),(\alpha>-1,\beta>0,x\geq 0)$$

белгісіз параметрлері α мен β-ны бағалаңыз.

224. Жоғарыдағы № 221-есепті неғұрлым шындыққа ұқсас әдіспен шығарыңыз.

225. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың орташа квадраттық ауытқуын σ, таңдамалық орташасын $\bar{x}_T$, түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқуын s, таңдама көлемін n деп алып, белгісіз математикалық үміт a-ны бағалайтын сенімділік интервалдарын табыңыз.

а) $\sigma = 4$, $\bar{x}_T = 10{,}2$, n=16, γ=0,99

б) $\sigma = 5$, $\bar{x}_T = 16{,}8$, n=25, γ=0,95

в) $s = 3$, $\bar{x}_T = 12$, n=9, γ=0,99

г) $s = 7{,}2$; $\bar{x}_T = 10$, n=40, γ=0,95

226. Детальдің диаметрі арнаулы сызғышпен 6 рет өлшенді. Өлшеулердің кездейсоқ қателерінің σ-сы 0,4-ке тең. Сызғыштың дәлдігін γ=0,999 сенімділігімен табыңыз.

227. Көлемі n болатындай таңдама арқылы түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқу s анықталған. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың бас орташа квадраттық ауытқуын бағалайтын сенімділік интервалын γ сенімділігімен табыңыз.

а) n=5, γ=0,95 , $s = 4{,}1$

б) n=15, γ=0,99 , $s = 3$.

228. Таңдаманың сандық сипаттамалары (III тарау, 2-мысал) $\bar{x} = 12{,}75$; σ_t =5,72 белгілі. Бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп есептеп оның белгісіз математикалық үмітін γ=0,99, сенімділік ықтималдығымен бағалайтын сенімділік интервалын табыңыз.

229. Гипергеометриялық үлестірімнің белгісіз параметрінің моменттер әдісін қолданып нүктелік бағасын табыңыз.

230. Кездейсоқ шама биномдық үлестіріммен берілгендігі анықталған.

а) Әрқайсысында 7 сынақтан (m=7) 15 тәжірибе (n=15) жүргізілген:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	7	3	1	1	1	1	1

б) Әрқайсысында 7 сынақтан 31 тәжірибе жүргізілген

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	13	7	2	2	2	2	2

Мұндағы x_i – оқиғаның әрбір тәжірибеде пайда болу саны, n_i – тәжірибелер саны. Моменттер әдісін қолданып белгісіз p параметрінің нүктелік бағасын табыңыз.

231. Кездейсоқ шама Пуассон үлестірімімен берілген. Төменде кездейсоқ оқиғаның пайда болу санының эмпирикалық үлестірімі келтірілген:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	300	200	100	80	70	30	20

Моменттер әдісін қолданып Пуассон үлестірімінің белгісіз параметрінің нүктелік бағасын табыңыз.

232. Кездейсоқ шама X (атылған оқтың нысанадан ауытқуы) бірқалыпты үлестіріммен берілген. x_i – орташа ауытқуы деп алып, моменттер әдісін қолданып бірқалыпты үлестірімнің белгісіз параметрлерінің (а және в) нүктелік бағаларын табыңыз:

а)

x_i	6	8	10	12	14	16	18	20	22
n_i	17	13	19	16	20	21	14	18	22

б)

x_i	3	6	9	12	15	18	21
n_i	4	6	5	2	7	4	5

233. Кездейсоқ шама көрсеткіштік үлесіріммен берілген (белгілі бір механизмнің жұмыс істеу уақыты). Орташа жұмыс істеу уақытын x_i деп алып мына эмпирикалық үлесірімдер бойынша моменттер әдісін қолданып көрсеткіштік үлестірімнің белгісіз параметрі λ-ны бағалаңыз:

а)

x_i	1	6	11	16	21	26
n_i	142	35	14	5	3	1

б)

x_i	13	16	19	22	25	28	31
n_i	89	30	20	10	8	2	1

234. Кездейсоқ шама – дайындалған детальдің стандарттан ауытқуы қалыпты үлестіріммен берілген. X_i (мм) – стандарттан ауытқуы деп алып, моменттер әдісін қолданып қалыпты үлестірімнің белгісіз а және σ параметрлерінің нүкелік бағаларын табыңыз:

а)

x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
n_i	7	10	24	28	24	20	24	20	10	8	6

б)

x_i	3	7	11	15	19	23	27
n_i	2	4	7	13	6	3	1

V тарау. СТАТИСТИКАЛЫҚ БОЛЖАМДАРДЫ ТЕКСЕРУ

§ 1. Негізгі ұғымдар. Болжамды тексерудің жалпы схемасы

1-анықтама. Статистикалық болжам деп кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрі немесе үлестірім параметрлері туралы алдын ала жасалатын болжамды айтады. Статистикалық болжам таңдаманың көмегімен тексеріледі.

Алдымен нөлдік болжам деп аталатын, тексерілуге тиіс Но болжамы қарастырылады. Бұл болжамға қарсы болжамды альтернативті деп атап, H_1 әріпімен белгілейміз. Мысалы: үлестірімнің белгісіз параметрі θ туралы нөлдік болжам былай болса $H_0 : \theta = \theta_0$, онда $H_1 :$ $: \theta \neq \theta_0$ (H_1: $\theta > \theta_0$, H_1: $\theta < \theta_0$).

Статистикалық болжамды тексеру барысында екі түрлі қате жіберуіміз мүмкін.

Бірінші текті қате – H_0 болжамы жоққа шығарылып H_1 болжамы қабылданады, бірақ негізінде Но дұрыс.

Екінші текті қате – H_0 болжамын қабылдаймыз, бірақ негізінде H_1 болжамы дұрыс.

2-анықтама. Бірінші текті қате жіберу ықтималдығын маңыздылық деңгейі дейміз де, α әріпімен белгілейміз.

Болжамды тексерудің жалпы схемасы:

1. Үлестірімі белгілі статистикалық критерий деп аталатын F кездейсоқ шамасы енгізіледі. Бұл шаманың әртүрлі еркіндік дәрежелері болып, ал үлестірімі қалыпты хи – квадрат, Стьюдент, Фишер-Снедекор үлестірімдерімен берілуі мүмкін.
2. Таңдамалық (эмпирикалық) белгілі деректерге сүйене отырып, критерийдің бақыланатын мәні $F_{бақ}$ анықталады.
3. Берілген α маңыздылық деңгейінде F үлестірімінің сын нүктелері кестесі арқылы критерийдің сындық мәні – $F_{сын}$ анықталады.
4. Егер $F_{бақ}<F_{сын}$ болса, онда H_0 болжамын жоққа шығаруға негіз жоқ, ал егер $F_{бақ}>F_{сын}$ болса, онда H_0 болжамы қабылданбайды.

§ 2. Пирсонның келісімдік ХИ-квадрат критерийі

Егер үлестірім заңы белгісіз болса, онда "бас жинақ А заңы бойынша үлестірілген", – деген нөлдік болжам келісімдік критерийлері арқылы тексеріледі. Олардың бірнеше түрі бар: Пирсон критерийі, Колмогоров критерийі, Смирнов критерийі т.т.

H_0 : "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген болжамды тексеру үшін Пирсонның келісімдік χ^2 критерийі қолданылады.

Сонымен h қадамымен біркелкі орналасқан таңдама берілсін:

x_i	x_1	x_2	x_3 ...	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3 ...	n_m

Енді теориялық жиіліктерді табамыз.

$$n_i^0 = \frac{nh}{\sigma_T} \cdot \varphi(u_i), i = \overline{1,m}$$

$$u_i = (x_i - \bar{x}_T) / \sigma_T, \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

немесе

$$n_i^0 = np_i, \qquad P_i = P(x_{i-1} < x < x_i).$$

Осыдан мына кесте анықталады:

Эмпирикалық жиіліктер	n_1	n_2	n_3	...	n_m
Теориялық жиіліктер	n_1^0	n_2^0	n_3^0	...	n_m^0

Теориялық және эмпирикалық жиіліктердің бір-бірінен ауытқуы кездейсоқ па, бақылаулар саны аз ба, әлде "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген нөлдік болжам дұрыс емес пе? Осы сұрақтарға Пирсон критерийі жауап береді.

Тексеру схемасы:

1. Статистикалық критерий ретінде мына кездейсоқ шаманы аламыз:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^0\right)^2}{n_i^0}. \tag{5.2.1}$$

Бұл шама еркіндік дәрежесі к=s-1-r болатын, хи – квадрат үлестірімімен таралған кездейсоқ шама. Мұнда s – таңдамадағы топтар саны, r – үлестірім параметрлерінің саны.

2. Берілген деректерге сүйене отырып критерийдің бақыланатын мәнін анықтаймыз.

$$\chi^2_{бак} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^0\right)^2}{n_i^0}. \tag{5.2.2}$$

3. Берілген α маңыздылық деңгейінде хи – квадрат үлестірімнің сын нүктелері кестесі арқылы $\chi^2_{сын}(\alpha;\kappa)$ критерийдің сындық мәнін анықтаймыз.

4. Егер $\chi^2_{бак} < \chi^2_{сын}(\alpha;\kappa)$ – нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ, ал егер $\chi^2_{бак} > \chi^2_{сын}(\alpha;\kappa)$ – нөлдік болжам қабылданбайды.

1-мысал. Эмпирикалық және теориялық жиіліктер берілген

Эмпирикалық жиіліктер	5	13	39	75	105	83	32	14
Теориялық жиіліктер	3	15	41	80	101	77	38	13

Берілген α=0,05 маңыздылық деңгейінде бас жинақтың қалыпты үлестірілгендігі туралы болжамды тексеріңіз.

Шешуі: Критерийдің бақыланатын мәнін анықтау үшін төмендегі кестені құрамыз.

s_i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$(n_i - n_i^0)^2 / n_i^0$
1	5	3	2	4	1,333
2	13	15	-2	4	0,267
3	39	41	-2	4	0,097
4	75	80	-2	25	0,3125
5	105	101	4	16	0,158
6	83	77	6	36	0,468
7	32	38	-6	36	0,947
8	14	13	1	1	0,077
					$\sum \approx 3{,}66$

Сонымен $\chi^2_{бак}$=3,66, ал критерийдің еркіндік дәрежесі к=s-1-r=5, себебі s = 8, r = 2 (қалыпты үлестірім екі параметр арқылы анықталады). Онда кестеден $\chi^2_{сын}$ (0,05; 5)=11,1. Сонымен $\chi^2_{бак} < \chi^2_{сын}$ – нөлдік гипотезаны жоққа шығаруға негіз жоқ. Алдыңғы 1-мысалда теориялық және эмпирикалық жиіліктер берілген. Енді тек эмпирикалық жиіліктер белгілі болғанда теориялық жиіліктерді қалай есептеуге болатындығын көрсетелік.

2-мысал. Интервалдық вариациялық қатар (III тарау, 3.1-кесте) мына түрде берілген:

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	10	21	35	22	12

Пирсон критерийін қолданып маңыздылық деңгейі $\gamma = 0{,}05$ болғанда сандық белгінің бақыланған мәндерін пайдаланып "бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген" деген нөлдік болжамды тексеріңіз.

Шешуі:

1. Бас жинақтың үлестірім заңы туралы болжам жасау үшін біріншіден, полигон және гистограмманың түріне қараймыз. Мысалы, бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп болжам жасау үшін:

а) гистограмманың түрі Гаусс қисығының түріне ұқсас болуы керек

б) эмпирикалық ассиметрия мен экцесс мына теңсіздіктерді $|a_s| < 2\sigma_s$ және $|e_k| < 2\sigma_k$ қанағаттандыруы керек.
Мұндағы

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}.$$

Қарастырып отырған мысал үшін

$a_s = -0{,}018$, e_k=0,8733, ал s_s=0,2377, $\sigma_k = 0{,}4547$, олай болса

$|a_s| < 2\sigma_s$ және $|e_k| < 2\sigma_k$.

Енді гистограммаға қарасақ (III тарау, § 2), оның түрі Гаусс қисығына ұқсас. Демек, бас жинақ қалыпты үлестіріммен берілген деп болжам жасауға негіз бар.

2. Нөлдік болжамды тексеру үшін Пирсон критерийін қолданамыз. Ол үшін $n_i' = np_i$, $p_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_T}{\sigma_T}\right)$ формулаларын қолданып теориялық жиіліктерді есептейміз.

Белгілеу енгізелік: $Z_{i-1} = \dfrac{x_{i-1} - \bar{x}_T}{\sigma_T}$, $Z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T}$.

Есептеу кестесін құрамыз.

Интер-валдар	n_i	Z_{i-1}	Z_i	$\Phi(Z_{i-1})$	$\Phi(Z_i)$	p_i	n_i^0
0-5	10	-2,23	-1,35	-0,4870	-0,4115	0,0755	8
5-10	21	-1,35	-0,48	-0,4115	-0,1844	0,2277	23
10-15	35	-0,48	0,39	-0,1844	0,1517	0,3361	34
15-20	22	0,39	1,27	0,1517	0,3980	0,2463	25
20-25	12	1,27	2,14	0,3980	0,4838	0,0858	9
	100						99

$\chi^2_{бак}$ есептеу үшін де есептеу кестесін жазған тиімді.

i	n_i	n_i^0	$n_i - n_i^0$	$(n_i - n_i^0)^2$	$\frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0}$
1	10	8	2	4	0,5
2	21	23	-2	4	0,17
3	35	34	1	1	0,03
4	22	25	-3	9	0,36
5	12	9	3	9	1
$\sum$					1,7

Сонда $\chi^2_{бак}=1,7$.

Енді γ=0,05 маңыздылық деңгейін де $k=5-1-2=2$ еркіндік дәрежесі бойынша $x^2_{сын}(0,05;2)$ кітап соңындағы кестеден анықтаймыз:

$x^2_{сын}(0,05;2)=6$. Осыдан $x^2_{бақ}<x^2_{сын}$ екенін көреміз. Демек, бас жинақтың қалыпты үлестіріммен берілгендігі туралы нөлдік болжамды қабылдамауға негіз жоқ.

§ 3. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың бас дисперсияларын салыстыру

Х және У қалыпты үлестірілген бас жинақтардан көлемдері n_1 және n_2-ге тең болатын таңдамалар алынып, олардың түзетілген таңдамалық дисперсиялары S_x^2 және S_y^2 табылсын. Берілген α маңыздылық деңгейінде мына нөлдік болжамды тексерейік.

H_0: D(x)=D(y) (5.3.1)

H_1 : D(x)>D(y) (5.3.2)

Статистикалық критерий ретінде түзетілген таңдамалық дисперсиялардың үлкенінің кішісіне қатынасын аламыз.

$$F = \frac{S^2_{үлкен}}{S^2_{кіші}} = \frac{S^2_{Y}}{S^2_{к}} \tag{5.3.3}$$

шамасы еркіндік дәрежелері $к_1=m_1-1$, $к_2=m_2-2$ болатын, Фишер-Снедекор үлестірімімен берілген кездейсоқ шама. Бұл жерде S^2_{Y}-қа сәйкес таңдаманың көлемі m_1, ал $S^2_{к}$-қа сәйкес таңдаманың көлемі m_2.

Енді берілген деректер бойынша (5.3.3) арқылы $F_{бак}$ анықтаймыз, одан кейін Фишер-Снедекор үлестірімінің сын нүкт елері кестесінен $F_{сын}(\alpha, к_1, к_2)$ - ны табамыз, сонда егер $F_{бак} < F_{сын}$ болса, онда нөлдік болжамды қабылдамауға негіз жоқ, ал $F_{бак} > F_{сын}$ болса нөлдік болжам қабылданбайды.

Ескерту: Егер қарсылас болжам (5.3.2) түрінде берілмей, мына түрде берілсе (H_1:D(x)≠D(y)) онда критерийдің сындық мәні мына $F_{сын}(\frac{\alpha}{2}; к_1; к_2)$ санына тең болады.

Мысал: Бірдей детальдар жасайтын екі автоматты станоктардың дәлдіктерін салыстыру мақсатымен бірінші станокта өнделген детальдардың 10-ы, ал екіншісінде өнделгендердің 8-і өлшеніп мынадай деректер алынды:

X_i	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42
$У_i$	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1.36	1,38		

α =0,05 маңыздылық деңгейінде "екі станок бірдей дәлдікпен жұмыс істейді" деген нөлдік болжамды "екінші станоктың дәлдігі жоғарырақ" деген альтернативті болжамға қарасты тексеріңіз.

Шешуі: Егер бірінші станоктан шығарылатын детальдардың өлшемін X, ал екіншісінен шығарылатындардың өлшемін Y десек – бұлар қалыпты таралған бас жинақтар. Олай болса станоктардың дәлдіктерін σ(x),σ(y) шамалары сипаттайды. Егер σ(x)=σ(y)/Q (D(x)=D(y)) болса, онда дәлдіктері бірдей болады, ал σ(x)>σ(y) (D(x)>D(y)) болса, онда екінші станоктың дәлдігі жоғарырақ болғаны.

Сонымен мынадай болжамды тексеру керек:

H_0 : D(x)=D(y)
H_1 : D(x)>D(y)

Берілген өлшеу деректерін көлемдері $n_1=10$, $n_2=8$ бас жинақтан алынған таңдамалар деп алып, олардың түзетілген таңдамалық дисперсияларын табамыз. $S_x^2=0{,}0188$, $S_y^2=0{,}0124$.

Олай болса $S^2_{үлкен}=S_x^2=0{,}0188$ $m_1=n_1=10$

$S^2_{kiшi}=S_Y^2=0{,}0124$ $m_2=n_2=8$

Критерийдің бақыланатын мәні:

$$F_{бақ}=\frac{S_Y^2}{S_x^2}=1{,}51.$$

Критерийдің сындық мәні:

$F_{сын}(0{,}05;\ 9;\ 7)=3{,}63$, яғни $F_{бақ}<F_{сын}$.

Олай болса нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ, яғни станоктардың дәлдіктері бірдей деп айта аламыз.

§ 4. Таңдамалық орташаны бас орташаның гипотетикалық (алдын-ала ұйғарылған) мәнімен салыстыру

(бас жинақтың дисперсиясы белгісіз)

Қалыпты үлестіріммен берілген бас жинақ Х-тан кездейсоқ теріліп алынған таңдама арқылы мына болжамды

$H_0: a=a_0$

$H_1: a\neq a_0$

тексереміз. Бұл жерде a_0 – бас орташаның гипотетикалық мәні.

1) Статистикалық критерий мына формуламен анықталады:

$$T=\frac{(\overline{X}_\delta-a_0)\sqrt{n}}{s}. \qquad (5.4.1)$$

$\overline{X}_\delta$ – бас орташа.

Бұл – еркіндік дәрежелері $k=n-1$ болатын Стьюдент үлестірімімен берілген кездейсоқ шама.

2) Критерийдің бақыланатын мәні анықталады

$$T_{бақ}=\frac{(\overline{X}_T-a_0)\sqrt{n}}{s} \qquad (5.4.2)$$

3) Критерийдің сындық мәні берілген α маңыздылық деңгейінде Стьюденттің екі жақты сын нүктелері кестесінен анықталады:

$$T_{сын} = t_{екі\ жақ.сын}(\alpha, к) \qquad (5.4.3)$$

4) Егер $|T_{бақ}| < T_{сын}$ болса – нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ, ал егер $|T_{бақ}| > T_{сын}$ болса онда болжам қабылданбайды.

1-мысал. Станок-автоматта жонылатын детальдің проектілік диаметрінің ұзындығы 55 мм болуы тиіс.

Кездейсоқ алынған 20 детальдың диаметрлерін өлшегенде мынадай деректер алынды:

x_i	54,8	54,9	55,0	55,1	55,3
n_i	2	3	4	6	5

α =0,05 маңыздылық деңгейінде мына нөлдік болжамды тексеріңіз:

$H_0 : a = a_0$
$H_1 : a \neq a_0$

Шешуі: Таңдамалық орташаны және түзетілген таңдамалық орташа квадраттық ауытқуды алдыңғы тарауларда айтылған тәсілдермен есептесек, $\overline{X}_T$=55,07, s=1,15 мәндерін табамыз, яғни (5.4.2) арқылы

$$T_{бақ} = \frac{(55{,}07 - 55)\sqrt{20}}{0{,}15} \approx 2{,}15.$$

Енді кестеден $T_{сын} = t_{екі\ жақ.сын.}$ (0,05; 19)=2,09 сындық мәнін табамыз.

Олай болса $T_{бақ} > T_{сын}$ болғандықтан нөлдік болжам қабылданбайды, станок проектілік дәлдікті қамтамасыз етпейді деп айтамыз.

ЕСЕПТЕР

235. III тараудағы № 209 есептің берілгенін пайдаланып теориялық және эмпирикалық жиіліктердің алшақтығы кездейсоқ екенін дәлелдеңіз.

236. Телефон станциясында бір минут ішінде дұрыс қосылмаған нөмірлердің саны кездейсоқ шама. Бір сағат ішінде дұрыс қосылмаған нөмірлер саны мына кестемен берілген:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	8	17	16	10	6	3

Пирсон келісімділік критерийін қолданып маңыздылық деңгейі α=0,05 болғанда "бас жинақ Пуассон үлестірімімен берілген" деген нөлдік гипотезаны тексеріңіз.

Нұсқау: 1. Пуассон үлестірімінің негізгі қажетті шарты M(x)=D(x) тексеру керек.

2. $P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ формуласында $\lambda = \bar{x}$ деп алып $p_0 = p(0)$, $p_1 = p(1)$, $p_2 = p(2)$, $p_3 = p(3)$, $p_4 = p(4)$, $p_5 = p(5)$, есептеңіз.

3. Теориялық жиілікті $n_i^0 = np_i$ есептеңіз.

4. Пирсон критерийін қолданып нөлдік болжамды тексеріңіз.

237. Бас жинақ X қалыпты үлестірілген деген болжам арқылы эмпирикалық (n_i) және теориялық (n_i^0) жиіліктер арасында алшақтықтың кездейсоқтығын немесе маңыздылығын α=0,05 маңыздылық деңгейінде Пирсон критерийі арқылы тексеріңіз.

а)

n_i	5	10	15	20	25
n_i^0	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8 13	15	16	20
n_i^0	5	9 14	16	18	19

в)

n_i	4	19	32	25	20	10
n_i^0	5	18	29	21	18	9

238. Қалыпты үлестірілген X,У бас жинақтарынан кездейсоқ алынған, көлемдері n_1 =9, n_2 =16 болатын таңдамалардың түзетілген дисперсиялары $S_x^2 = 34{,}02$; $S_y^2 = 12{,}15$.

α=0,05 маңыздылық деңгейінде мына болжамды тексеріңіз:

H_0 : D(x)=D(y)

H_1 : D(x)>D(y)

239. Жоғарыдағы есепті қарсылас болжам H_1: D(x)≠D(y) болғанда маңыздылық деңгейі α=0,02 деп алып шығарыңыз.

240. Қалыпты үлестірілген бас жинақтардан мынадай таңдамалар алынған:

x_i	2,08	2,10	2,12	2,14	2,16	2,18
n_i	2	3	1	10	3	1

y_j	2,03	2,06	2,09	2,12
n_j	3	1	4	2

а) маңыздылық деңгейі $\alpha=0,01$ болғанда мына болжамды тексеріңіз:

$H_0 : D(x)=D(y)$
$H_1 : D(x)>D(y)$

а) маңыздылық деңгейі $\alpha=0,1$ болғанда мына болжамды тексеріңіз:

$H_0 : D(x)=D(y)$
$H_1 : D(x)\neq D(y)$

241. Автоматтандырылған цехта жасаланатын поршеньдердің проектілік өлшемі $a=a_0=76$ мм болуы тиіс. Қоймадағы дайын бұйымдар (поршень) ішінен бірнешеуі кездейсоқ теріліп, олардың диаметрлерін өлшегенде, мынадай деректер алынды:

x_i	75,92	75,94	75,96	75,98	76,0	76,2
n_i	2	3	7	4	2	2

$\alpha=0,05$ маңыздылық деңгейінде "цехтағы станоктар проектілік дәлдікті қамтамасыз етеді" деген болжамды тексеріңіз.

242. Қалыпты үлестірілген Х,У бас жинақтарынан кездейсоқ теріліп алынған, көлемдері $n_1=9$, $n_2=6$ таңдамалары үшін $D_T(x)=14,4$ және $D_T(y)=20,5$. $\alpha=0,1$ маңыздылық деңгейінде мына болжамды тексеріңіз:

$H_0 : D(x)=D(y)$
$H_1 : D(x) \neq D(y)$

243. Қалыпты үлестірілген бас жинақтан алынған, көлемі $n=16$ таңдама үшін $\bar{x}=118,2$ және $S=3,6$ анықталды. $\alpha=0,05$ маңыздылық деңгейінде мына болжамды тексеріңіз:

$H_0 : a = 120$
$H_1 : a \neq 120$

244. Қатаң жүйемен сатуға арналған дәрінің әр таблеткасы 2 г болуы тиіс еді. 196 таблетканы кездейсоқ теріп алып өлшегенде $\bar{x}=2,3$ және S=0,6 анықталды. Осы дәріні ауруларға беруге бола ма?

Нұсқау: $\alpha=0,01$ маңыздылық деңгейінде

H_0: $a = 2$
H_1 : $a > 2$

болжамын біржақты сын облысы үшін тексеру керек, дәрі таблеткаларының салмағын қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама деп есептеңіз.

VI тарау. **ДИСПЕРСИЯЛЫҚ ТАЛДАУ ЭЛЕМЕНТТЕРІ**

Практикалық қажеттіліктен туындайтын көптеген есептерде зерттелінетін экономикалық көрсеткіштер әртүрлі факторлардан тәуелді болуы мүмкін. Көптеген факторлардың сандық сипаттамалары жоқ, олардың тек сапалық әсері болады. Мысалға экономикалық көрсеткіш ретінде жұмыс өнімділігін қарастырсақ, онда цехтағы еңбекті ұйымдастыру—осы көрсеткішке әсерін тигізетін сапалық фактор ал олардың зерттеліп отырған сандық сипатты белгіге (экономикалық көрсеткішке) әсерінің бар-жоғын тексеру үшін дисперсиялық талдау деп аталатын статистикалық тәсіл қолданылады. Сапалық факторлардың санына қарай бір факторлы, екі факторлы, т.с.с. дисперсиялық талдау ұғымдары енгізіледі.

§ 1. Бір факторлы дисперсиялық талдау

Бұл жағдайда зерттеліп отырған X сандық сипатты белгісіне бір ғана сапалық фактордың әсерінің бар-жоғы тексеріледі. Сапалық фактордың m деңгейінің әрқайсысында сандық сипатты белгінің n_1, n_2, ... , n_m байқалған мәндері сынақ арқылы анықталады. Сонымен, мынадай шамалар анықталады.

а) Сандық сипатты белгінің байқалған мәндері:

$$x_{ji}, \ i=\overline{1,m} \ j = \overline{1,n_i}\,. \qquad (6.1.1)$$

б) Байқаулардың жалпы саны:

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i\,. \qquad (6.1.2)$$

в) Топтық орташа мәндер:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ji}. \tag{6.1.3}$$

г) Жалпылама орташа мәндер:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ji} \tag{6.1.4}$$

д) Факторлық дисперсия:

$$S^2_{факт} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \tag{6.1.5}$$

е) Қалдық дисперсия:

$$\bar{S}^2_{қалд} = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ji} - \bar{x}_i)^2. \tag{6.1.6}$$

Ары қарай, егер сапалық фактор зерттеліп отырған көрсеткішке әсер етпесе, онда топтық бас орташалар $M(\bar{x}_i)=a_i$ бірдей болуы қажет, яғни сапалық фактордың көрсеткішке әсерінің бар-жоғын тексеру үшін берілген α маңыздылық деңгейінде мына нөлдік гипотезаны тексеру керек:

$H_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m$

Ол үшін мынадай статистикалық критерий анықталады

$$F = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{калд}}},$$

бұл – еркіндік дәрежелер $k_1=m-1$, $k_2=n-m$ болатын, Фишер-Снедекор үлестірімімен берілген кездейсоқ шама. Енді сынақ нәтижелеріне қарай отырып критерийдің бақыланатын мәнін $F_{бақ}$ есептейміз, одан кейін Фишер-Снедекор үлестірімінің сын нүктелері кестесі арқылы критерийдің сындық мәнін

$F_{сын}(\alpha; k_1; k_2)$-ны анықтаймыз.

Сонда, егер $F < F_{сын}$ болса, онда H_0 гипотезасын жоққа шығаруға негіз жоқ, егер $F > F_{сын}$ болса, онда нөлдік гипотеза қабылданбайды, яғни сапалық фактордың зерттеліп отырған көрсеткішке тигізетін әсері мол деп айта аламыз.

1-мысал. Бір типтес өнім шығаратын үш фабрикадағы мамандықтары бірдей жұмысшылардың еңбек өнімділігіне бір сапалық фактордың (еңбекті ұйымдастырудың) тигізетін әсерін $\alpha=0,05$ маңыздылық деңгейінде анықтау керек. Бұл есепте сынақ арқылы анықталған жұмысшылардың еңбек өнімділігі базалық еңбек өнімділігі ретінде қабылданған бірлікке қатынасы арқылы төмендегі кестеде берілген:

1-кесте

Реттік нөмірі j	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}
1	1,3	1,4	1,27
2	1,27	1,3	1,05
3	1,09	1,28	1,24
4	1,01		1,22
5	1,09		

Шешуі: Сонымен $n_1=5$; $n_2=3$; $n_3=4$; $n=12$; $m=3$.

Енді группалық орташаларды анықтаймыз:

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}x_{j_1}=\frac{1,3+1,27+1,09+1,01+1,09}{5}=1,152$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}x_{j2}=\frac{1,4+1,3+1,28}{3}=1,327$$

$$\bar{x}_3=\frac{1}{n_3}\sum_{j=1}^{n_3}x_{j_3}=\frac{1,27+1,05+1,24+1,22}{4}=1,21$$

Сонда жалпылама орташа:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}=\frac{5,76+3,98+4,78}{12}=1,21$$

Ары қарай, факторлық дисперсияны табамыз:

$$S^2_{факт}=\frac{1}{2}\left[5\cdot(1,152-1,21)^2+3\cdot(1,327-1,21)^2+4\cdot(1,195-1,21)^2\right]=0,0294$$

Енді қалдық дисперсияны табу үшін мына кестені құрамыз:

2-кесте

Реттік нөмірі	$x_{j1}-\bar{x}_1$	$(x_{j1}-\bar{x}_1)^2$	$x_{j2}-\bar{x}_2$	$(x_{j2}-\bar{x}_2)^2$	$x_{j3}-\bar{x}_3$	$(x_{j3}-\bar{x}_3)^2$
1	1,148	0,0219	0,073	0,0053	0,075	0,0056
2	1,118	0,0139	-0,027	0,0007	-0,145	0,021
3	-0,062	0,0038	-0,047	0,0022	0,045	0,0020
4	-0,142	0,0201			0,025	0,0006
5	-0,062	0,0038				
Σ		0,0635		0,0082		0,0292

Сонымен,

$$S^2_{қал}=\frac{1}{9}(0{,}0635+0{,}0082+0{,}0292)=0{,}0112.\text{ Онда } F_{бақ}=\frac{0{,}0294}{0{,}0112}=2{,}625,$$

ал кестеден $F_{сын}(0{,}05;\ 2;\ 9)=4{,}26$, осыдан $F_{бақ}< F_{сын}$ яғни сапалық фактор еңбек өнімділігіне әсер етпейді деп айта аламыз.

ЕСЕПТЕР

245. Сапалық фактордың 4 деңгейінде жүргізілген сынақтардың нәтижесі төмендегі кестеде берілген. Дисперсиялық талдау әдісімен 0,05 маңыздылық деңгейінде топтық бас орташалардың теңдігі туралы нөлдік гипотезаны тексеру керек.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}
1	47	54	52	57
2	50	56	54	61
3	58	61	55	
4	67	64		
5		66		

246. 14 сынақтың 7-уі сапалық фактордың бірінші деңгейінде, 3-уі екінші деңгейінде, ал 4 -уі үшінші деңгейінде жүргізілді. Дисперсиялық талдау әдісімен α =0,01 маңыздылық деңгейінде осы фактордың зерттеліп отырған көрсеткішке әсерінің бар-жоғын тексеру қажет. Сынақ нәтижелері төменгі кестеде берілген:

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}
1	30,56	43,44	31,36
2	32,66	47,51	36,20
3	34,78	53,80	36,38
4	35,50		42,20
5	36,63		
6	40,20		
7	42,28		

247. Сапалық фактордың 5 деңгейінде жүргізілген сынақтардың нәтижесі төмендегі кестеде берілген. α =0,05 маңыздылық деңгейінде группалық бас орташалардың теңдігі туралы нөлдік гипотезаны тексеру керек.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}	x_{j5}
1	126	115	74	83	80
2	133	119	87	87	80
3	141	122	88	97	82
4	147	128	94	106	86

248. Сапалық фактордың 6 деңгейінде жүргізілген сынақтардың нәтижесі төмендегі кестеде берілген. α =0,01 маңыздылық деңгейінде группалық бас орташалардың теңдігі туралы нөлдік гипотезаны тексеру керек.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}	x_{j5}	x_{j6}
1	54	51	52	51	52	51
2	58	58	56	59	56	59
3	64	56	54	53	58	58
4	66	64	58	63	56	

249. Қаладағы 5 автобус паркінде автобустардың жүру кестесін бұлжытпай орындауы кездейсоқ таңдамалық тәсілмен сыналды. Базалық бірлікке қатынасы бойынша берілген осы сынақ нәтижелері төменгі кестеде берілген. α=0,05 маңыздылық деңгейінде осы көрсеткішке бір сапалық фактордың (енбекті ұйымдастырудың) қаншалықты әсері бар екенін тексеру керек.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}	x_{j5}
1	1,21	1,33	1,44	1,61	1,34
2	1,16	1,27	1,46	1,53	1,38
3	1,51	1,45	1,42	1,41	1,43
4	1,37	1,53	1,58	1,73	
5		1,46	1,67		
6		1,58			

250. Сапалық фактордың 4 деңгейінде жүргізілген сынақ нәтижелері төмендегі кестеде берілген. α=0,05 маңыздылық деңгейінде топтық бас орташалардың теңдігі туралы нөлдік гипотезаны тексеру керек.

251. α=0,01 маңыздылық деңгейінде топтық бас орташалардың теңдігі туралы гипотезаны тексеріңіз.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}
1	37	60	69
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	

252. α=0,05 маңыздылық деңгейінде төмендегі болжамды H_0: $a_1=a_2=a_3$ тексеріңіз.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37

253. α =0,01 маңыздылық деңгейінде мына болжамды тексеріңіз H_0 : $a_1=a_2= a_3= a_4$.

Реттік нөмірі	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}
1	1,00	0,92	0,88	1,06
2	1,01	1,02	0,93	1,27
3	1,26	1,04	0,94	
4	1,28	1,15		
5		1,19		

VII тарау. КОРРЕЛЯЦИЯЛЫҚ ЖӘНЕ РЕГРЕССИЯЛЫҚ ТАЛДАУ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 1. Негізгі ұғымдар

Корреляция ұғымы XIX ғасырдың бас кезінде ағылшын ғалымдары Ф. Гальтон мен К. Пирсонның еңбектерінде енгізілді. Екі кездейсоқ шама бір-бірімен функционалдық байланыста немесе статистикалық байланыста болады, не болмаса бір-бірінен тәуелсіз болуы мүмкін.

1-анықтама. Егер X кездейсоқ шамасының әрбір мүмкін мәніне Y кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің жиыны, яғни статистикалық үлестірімі сәйкес келсе, онда мұндай тәуелділік *статистикалық тәуелділік* деп аталады.

2-анықтама. Y кездейсоқ шамасының $\bar{y}_x$ – шартты орташа мәні деп X=x болғандағы Y шамасының қабылдануы мүмкін мәндерінің арифметикалық орташасын айтады.

Мысалы: x=6 болғанда Y шамасы $y_1=4$; $y_2=7$; $y_3=9$; $y_4=12$ мәндерін қабылдаса, онда

$$\bar{y}_x = \frac{4+7+9+12}{4} = 8$$

$\bar{x}_y$ – шартты орташасы да осылай анықталады.

3-анықтама. Егер бір кездейсоқ шама өзгергенде екінші шаманың орташа мәні өзгерсе, онда мұндай статистикалық байланыс корреляциялық байланыс деп аталады.

Сонымен X және Y кездейсоқ шамалары арасындағы корреляциялық байланыс мына формулалармен беріледі:

$$M_x(Y)=f(x), \tag{7.1.1}$$

$$M_y(X)=g(y). \tag{7.1.2}$$

Бұл жерде $M_x(Y)$, $(M_y(X))-Y(X)$ кездейсоқ шамасының $X=x$ $(Y=y)$ мәнін қабылдағанда анықталатын шартты математикалық үміті. (7.1.1), (7.1.2) – моделдік регрессия теңдеулері деп аталады. Оларды табу үшін бізге, жалпы жағдайда (X,Y) екі өлшемді кездейсоқ шамасының үлестірім заңын білуіміз керек.

Ал практикада зерттеуші қолында шектеулі көлемді таңдама $(x_i y_j)$ $(i=\overline{1,l},\ j=\overline{1,m})$ ғана болады. Сондықтан, бұл жағдайда модельдік регрессия теңдеулерін жуықтап бағалау туралы ғана сөз болуы орынды. Практикада X және Y айнымалылары арасындағы статистикалық байланыстарды зерттеу үшін корреляциялық және регрессиялық талдау тәсілдері қолданылады.

§ 2. Сызықты регрессия теңдеулері

Сонымен бізге көлемі n -ге тең $(x_i y_j)$ $(i=\overline{1,l},\ j=\overline{1,m})$ таңдамасы берілсін, онда осы таңдама арқылы мынадай сызықты регрессия теңдеулері табылады:

$$\overline{y}_x = \overline{y} + r_T \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}), \tag{7.2.1}$$

$$\overline{x}_y = \overline{x} + r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}), \tag{7.2.2}$$

(7.2.1)-Y-тің X -ке байланысты таңдамалық регрессия теңдеуі, ал (7.2.2) X-тің Y-ке байланысты таңдамалық регрессия теңдеуі деп аталады.

Егер x_i — вариантасының жиілігі n_j, n_i—y_j вариантасының жиілігі n_j, ал (x_i, y_i) — қосақтарының жиіліктері n_{ij} болса, мынадай орташаларды анықтаймыз:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{l} x_i n_i / n \tag{7.2.3}$$

$$\overline{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j n_j / n \tag{7.2.4}$$

$$\overline{xy} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij} / n \tag{7.2.5}$$

Енді таңдамалық дисперсияларды табайық.

$$\overline{\sigma_x^2} = \sum x_i^2 n_i / n - (\overline{x})^2 \tag{7.2.6}$$

$$\overline{\sigma_y^2} = \sum y_j^2 n_j / n - (\overline{y})^2 \qquad (7.2.7)$$

Олай болса, мынадай шамаларды анықтауға мүмкіншілік туады:

$$b_{yx} = (\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}) / \sigma_x^2 \qquad (7.2.8)$$

$$b_{xy} = (\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}) / \sigma_y^2 \qquad (7.2.9)$$

$$r_T = b_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = b_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \qquad (7.2.10)$$

Мұнда b_{yx} – Y-тің X бойынша таңдамалық регрессия коэффициенті, b_{xy} – X-тің Y бойынша таңдамалық коэффициенті, ал r_T таңдамалық корреляция коэффициенті деп аталады.

Корреляция коэффициентінің негізгі қасиеттері:

а) $-1 \le r_T \le 1$;

б) Егер $r_T = \pm 1$ болса, онда корреляциялық байланыс сызықты функционалдық тәуелділік болады.

в) Егер $r_T = 0$ болса, онда сызықтық корреляциялық байланыс жоқ, бірақ корреляциялық немесе статистикалық байланыстар басқаша түрде болуы мүмкін.

г) r_T – бас корреляция коэффициенті ρ-дың нүктелік бағасы болады.

1-мысал. 50 бір типтес кәсіпорындар үшін тәуліктік өнім шығарылымының Y (тонна) негізгі өндірістік қорлардан X (млн.теңге) тәуелділігін қарастырайық.

7.1. кесте

Y \ X	9	10	13	15	n_j
10	8	10			18
12	2	5	13		20
20			7	5	12
n_i	10	15	20	5	n=50

Y пен X арасында сызықты корреляциялық байланыс бар деп жорамалдап, таңдамалық регрессия теңдеулерін құрыңыз.

Шешуі: (7.2.3)–(7.2.10) формулалары арқылы барлық шамаларды анықтаймыз.

$$\bar{x}=\frac{9\cdot10+10\cdot15+13\cdot20+15\cdot5}{50}=11{,}5$$

$$\bar{y}=\frac{10\cdot18+12\cdot20+20\cdot12}{50}=13{,}2$$

$$\overline{xy}=\frac{9\cdot10\cdot18+9\cdot12\cdot2+10\cdot10\cdot10+10\cdot12\cdot5+13\cdot12\cdot13+13\cdot20\cdot7+15\cdot20\cdot5}{50}=$$

$$=157{,}68$$

$$\sigma_x^2=\frac{81\cdot10+100\cdot15+169\cdot20+225\cdot5}{50}-(11{,}5)^2=16{,}05$$

$$\sigma_y^2=\frac{100\cdot18+144\cdot20+400\cdot12}{50}-(13{,}2)^2=15{,}36$$

$$b_{yx}=\frac{157{,}68-11{,}5\cdot13{,}2}{16{,}05}=0{,}366 \qquad b_{xy}=\frac{157{,}68-11{,}5\cdot13{,}2}{15{,}36}=0{,}382$$

$$r_T=0{,}366\cdot\frac{\sqrt{16{,}05}}{\sqrt{15{,}36}}=0{,}374$$

Осы табылған мәндерді (7.2.1), (7.2.2) теңдеулеріне қойсақ мына регрессия теңдеулерін аламыз:

$$\bar{y}_x=0{,}366x+9 \qquad (7.2.11)$$

$$\bar{x}_y=0{,}382y+6{,}41 \qquad (7.2.12)$$

Осы теңдеулерден мынаны байқаймыз: егер негізгі өндіріс қорларын 1 млн. теңгеге арттырсақ, онда тәуліктік өнім шығарылымы орта есеппен 0,366 тоннаға өседі, ал тәуліктік өнім шығарылымын 1 тоннаға өсіру үшін негізгі өндіріс қорларын орта есеппен 0,382 млн.теңгеге арттыру керек.

Сонымен, X және Y шамалары арасында сызықтық корреляциялық байланыс бар дейміз, бұл байланыстың қаншалықты r_T тығыз екендігін анықтайды.

§ 3. Корреляциялық талдаудың негізгі қағидалары. Байланыс параметрлерінің маңыздылығын тексеру, интервалдық бағалаулар

Корреляциялық талдаудың негізгі есебі — нүктелік және интервалдық бағалаулар арқылы кездейсоқ айнымалылар арасындағы байланысты айқындау.

Бұл тәсіл зерттеуші қолындағы таңдамалық (X_iY_i) қосақтары екі өлшемді қалыпты үлестірілген (X,Y) бас жинағынан кездейсоқ теріліп алынған жағдайда қолданылады. Бұл жағдайда модельдік регрессия теңдеулерінің былай жазылатыны белгілі:

$$M_x(Y) = a_y + \rho\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(x - a_x) \qquad (7.3.1)$$

$$M_y(X) = a_x + \rho\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}(y - a_y) \qquad (7.3.2)$$

Мұнда $a_x, a_y, \sigma_x, \sigma_y$ — қалыпты үлестірім параметрлері, ρ — бас корреляция коэффициенті.

(7.3.1), (7.3.2)-ден көретініміз, ρ екі айнымалылар арасында тек сызықтық тәуелділік болған жағдайда ғана байланыс тығыздығының көрсеткіші болады.

3.1. Корреляция коэффициентінің маңыздылығын тексеру

Практикалық зерттеулерде, көбінесе ρ белгісіз болғандықтан, корреляциялық байланыстың тығыздығын r_T арқылы пайымдаймыз, яғни r_T-тың маңыздылығын тексереміз. Ол үшін X және Y айнымалылары арасында сызықтық корреляциялық байланыс жоқ деген нөлдік болжам тексеріледі, яғни H_0: $\rho = 0$

Статистикалық критерий: $t = r\sqrt{n-2} / \sqrt{1-r^2}$ (7.3.3)

Бұл — (n-2) еркіндік дәрежелері бар Стьюденттің t-үлестірімімен берілген кездейсоқ шама.

Егер маңыздылық деңгейінде $t_{байк} > t_{сын}(\alpha; n\text{-}2)$ болса, онда H_0 жоққа шығарылады, яғни таңдамалық корреляция коэффициенті r_T маңызды, нөлден әлдеқайда өзгеше деген тұжырымға келеміз.

Егер r_T маңызды болса, онда таңдамалық регрессия коэффициенттері b_{yx} пен b_{xy}-те маңызды болады, бұл жағдайда бас корреляция коэффициенті ρ мен бас регрессия коэффициенттері β_{yx}, β_{xy} үшін $\gamma = 1-\alpha$ сенімділігімен мынадай сенімділік интервалдарын анықтаймыз.

$$b_{yx} - t_{\alpha,n-2} \frac{\sigma_y \sqrt{1-r_T^2}}{\sigma_x \sqrt{n-2}} \le \beta_{yx} \le b_{yx} + t_{\alpha,n-2} \frac{\sigma_y \sqrt{1-r_T^2}}{\sigma_x \sqrt{n-2}} \qquad (7.3.4)$$

$$b_{xy} - t_{\alpha,n-2} \frac{\sigma_x \sqrt{1-r_T^2}}{\sigma_y \sqrt{n-2}} \le \beta_{xy} \le b_{xy} + t_{\alpha,n-2} \frac{\sigma_x \sqrt{1-r_T^2}}{\sigma_y \sqrt{n-2}} \qquad (7.3.5)$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+r_T}{1-r_T} - t_\gamma \frac{1}{\sqrt{n-3}} \le f(\rho) \le \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_T}{1-r_T} + t_\gamma \frac{1}{\sqrt{n-3}} \qquad (7.3.6)$$

Ескерту: (7.3.6) формуласында $f(\rho) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$ шамасы үшін сенімділік интервалы көрсетілген, осы (7.3.6) анықталғаннан кейін ρ-ны бағалайтын сенімділік интервалын арнайы кесте арқылы табамыз, ал t_γ шамасы $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ теңдеуінен анықталады.

1-мысал. (7.1) кестесінде көрсетілген деректерді пайдалана отырып X пен Y шамалары арасындағы байланыс параметрлерінің маңыздылығын тексеріңіз және сенімділік интервалдарын табыңыз. Маңыздылық деңгейі $\alpha = 0{,}05$.

Шешуі: Жоғарыда мынадай шамаларды есептегенбіз:

$$r_T = 0{,}374; \quad b_{yx} = 0{,}366; \quad b_{xy} = 0{,}382;$$

$$\sigma_x^2 = 16{,}05; \; \sigma_y^2 = 15{,}36.$$

$\alpha = 0{,}05$ маңыздылық деңгейінде мына болжамды тексерейі H_0: $\rho = 0$

$$t_{бақ} = \frac{r_T\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_T^2}} = \frac{0{,}374\sqrt{50-2}}{\sqrt{1-(0{,}374)^2}} = 2{,}79$$

$$t_{сын}(\alpha; n-2) = t_{сын}(0{,}05;48) = 2{,}01$$

Енді $t_{бак} > t_{сын}$ болғандықтан H_0 жоққа шығарылады, яғни r_T-маңызды, нөлден әлдеқайда өзгеше, олай болса β_{yx} пен β_{xy}-те маңызды болғаны.

Ары қарай $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$ сенімділігімен (7.3.4)–(7.3.5) түріндегі сенімділік интервалдарын анықтаймыз.

$n = 50$; $\sigma_x = 4$; $\sigma_y = 3{,}92$; $t_{\alpha,n-2} = 2{,}01$ екенін біле отырып есептесек,

$0{,}102 \le \beta_{yx} \le 0{,}63$ және $0{,}108 \le \beta_{xy} \le 0{,}656$ интевалдарын аламыз. Енді белгісіз ρ корреляция коэффициентін бағалайтын сенімділік интервалын табу үшін (7.3.6) формуласын пайдаланамыз, сонда

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+r_T}{1-r_T} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}374}{1-0{,}374} \approx 0{,}48.$$

$\Phi(t_\gamma) = 0{,}475$ болса $t_\gamma = 1{,}96$ олай болса $0{,}48 - 1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{47}} \le f(\rho) \le$ $\le 0{,}48 + 1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{47}}$ немесе $0{,}114 \le f(\rho) \le 0{,}766$. Енді арнаулы кестені пайдаланып, белгісіз бас корреляция коэффициенті ρ-ны бағалайтын сенімділік интервалын $\gamma = 0{,}95$ сенімділігімен табамыз, сонда $0{,}113 \le \varrho \le 0{,}644$.

§ 4. Сызықтық регрессиялық талдау

Регрессиялық талдау тәсілі айнымалылар арасындағы тәуелділіктің түрін анықтау үшін, модельдік регрессия теңдеуін бағалау үшін және тәуелді айнымалының белгісіз мәндерін болжау үшін қолданылады. Регрессиялық талдауда нәтижелік белгі деп аталынатын Y айнымалысының, факторлық белгі деп аталатын X айнымалысынан біржақты тәуелділігі қарастырылады.

Сонымен модельдік регрессия функциясы $\varphi(x)$ болсын, яғни

$$M_x(Y) = \varphi(x) \qquad (7.4.1)$$

Бірақ, Y белгісінің кейбір бақыланатын мәндері $y(x)$ есепке алынбаған факторлардың және кездейсоқ себептердің әсерінен осы $\varphi(x)$-мәнінен азды-көпті ауытқиды.

Сондықтан қосақты регрессиялық модель былай жазылады:

$$y(x) = \varphi(x) + \varepsilon\,, \tag{7.4.2}$$

мұндағы ε – ауытқуды сипаттайтын кездейсоқ айнымалы.

Сонымен, бас жинақ (X,Y)-тен көлемі n-ге тең $(x_i y_i)$ таңдамасы алынсын. Енді (7.4.2) моделінің ең қарапайым, сызықты түрін қарастырайық:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \tag{7.4.3}$$

Осы сызықты модельдің таңдамалық бағасы ретінде мына таңдамалық сызықты регрессия теңдеуін аламыз:

$$\overline{y}_x = \overline{y} + b_1(x - \overline{x}) \tag{7.4.4}$$

Сонда берілген $\gamma = 1 - \alpha$ сенімділігімен белгісіз шартты математикалық үміт $M_x(Y)$ -ты бағалайтын сенімділік интервалы мына түрде анықталды:

$$\overline{y}_x - S_{\overline{y}_x} \cdot t_{\alpha,n-2} \le M_x(Y) \le \overline{y}_x + S_{\overline{y}_x} \cdot t_{\alpha,n-2} \tag{7.4.5}$$

Мұнда $S_{\overline{y}_x}$ – шартты орташаның стандартты қатесі, ал шартты орташаның дисперсиясы

$$\hat{S}^2_{\overline{y}_x} = \frac{\sum\left(\overline{y}_{x_i} - \overline{y}\right)^2 \cdot n_i}{n-2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{n\sigma_x^2}\right]. \tag{7.4.6}$$

Енді $x = x_0$ болғандағы белгісіз y_0^* мөнін мынадай сенімділік интервалымен болжаймыз:

$$\overline{y}_{x_0} - \hat{S}_{\overline{y}_0} \cdot t_{\alpha,n-2} \le y_0^* \le \overline{y}_{x_0} + \hat{S}_{\overline{y}_0} \cdot t_{\alpha,n-2}\,, \tag{7.4.7}$$

мұнда

$$\hat{S}^2_{\overline{y}_0} = \frac{\sum\left(\overline{y}_{x_i} - \overline{y}\right)^2 \cdot n_i}{n-2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\overline{x})^2}{n\sigma_x^2}\right], \tag{7.4.8}$$

ал $t_{\alpha,n-2}$ – Стьюдент үлестірімінің сын нүктелері кестесімен анықталады.

1-мысал. (7.1) кестесіндегі деректерді пайдаланып, негізгі өндірістік қорлары 12 млн.теңге болатын кәсіпорындар үшін орташа тәуліктік өнім шығарылымын және жеке алынған кәсіпорындағы тәуліктік өнім шығарылымын бағалайтын сенімділік интервалдарын $\gamma = 0{,}95$ сеніділігімен табыңыз.

Шешуі: Жоғарыда мыналарды анықтағанбыз:

$\bar{x} = 11{,}5;\quad \sigma_x^2 = 16{,}05;\quad \bar{y} = 13{,}2;\quad \bar{y}_x = 0{,}366 \cdot x + 9;$

Енді мына кестені құрамыз

x_i	n_i	$\bar{y}_{x_i}$	$\left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2 \cdot n_i$
9	10	12,3	8,1
10	15	12,7	3,75
13	20	13,7	5,0
15	5	14,5	8,45
		$\sum$	25,3

Онда:
$$S^2_{\bar{y}_x|x=12} = \frac{25{,}3}{50-2}\left(\frac{1}{50} + \frac{(12-11{,}5)^2}{50\cdot 16{,}05}\right) = 0{,}01;$$

$$\hat{S}^2_{\bar{y}_0} = \frac{25{,}3}{50-2}\left(1 + \frac{1}{50} + \frac{(12-11{,}5)^2}{50\cdot 16{,}05}\right) = 0{,}54,$$

яғни $S_{\bar{y}_x|x=12} = 0{,}1;\ \hat{S}_{\bar{y}_0} = 0{,}73$, ал регрессия теңдеуінен $\bar{y}_{x=12} = 13{,}39$,

кестеден $t_{\alpha,n-2} = t_{0{,}05;48} = 2{,}01$. Осы табылған мәндерді (7.4.5) және (7.4.7) формулаларына қойсақ мына сенімділік интервалдарын аламыз:

$$13{,}19 \le M_{x_0=12}(y) \le 13{,}59$$

$$12{,}12 \le y^*_{x_0=12} \le 14{,}66$$

Сонымен, негізгі өндіріс қорларының шамасы 12 млн. теңге болатын кәсіпорындардың орташа тәуліктік өнімділігі 0,95 сенімділігімен 13,19(т) мен 13,59(т) аралығында болады, ал негізгі өндіріс қорлары 12 млн. теңге болатын жеке алынған кәсіпорынның тәуліктік өнім шығаруы 95% сенімділігімен 12,12 тонна мен 14,66 тонна аралығында жатады.

4.1. Регрессия теңдеуінің маңыздылығын тексеру

Регрессия теңдеуінің маңыздылығын тексеру үшін дисперсиялық талдау тәсілін қолданамыз. Ол үшін факторлық айнымалы X - тің әрбір деңгейінде тәуелді айнымалы Y-тің бірнеше бақыланатын мәндері анықталуы қажет.

Енді мына теңдікті қарастырайық

$$Q = \sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \sum \left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2 + \sum \left(y_i - \bar{y}_{x_i}\right)^2 \tag{7.4.9}$$

немесе

$$Q = Q_{факт} + Q_{калд.}$$

Сонда бірінші қосылғыш $Q = \sum \left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2$ сызықты регрессия бойынша өзгерумен сипатталатын квадраттардың қосындысы, ал екінші қосылғыш $\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2$ – регрессиядан кездейсоқ ауытқуларды сипаттайды, сонда дисперсиялар

$$S^2_{факт} = \sum \left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2 = Q_{факт}\ , \tag{7.4.10}$$

$$S^2_{калд} = \sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2 / (n-2) = Q_{калд} / (n-2)\,. \tag{7.4.11}$$

Енді мынадай нөлдік болжам тексеріледі H_0: "X пен Y арасында сызықты байланыс жоқ".

Статистикалық критерий

$$F = \frac{S^2_{факт}}{S^2_{калд}}. \tag{7.4.12}$$

Бұл Фишер-Снедекор үлестірімімен берілген, еркіндік дәрежелері k=1; k=n-2 болатын кездейсоқ шама.

Енді $F_{бак} > F_{сын}(\alpha, k_1, k_2)$ болса Но болжамы жоққа шығарылады, яғни регрессия теңдеуі маңызды, X пен Y айнымалылары арасында біржақты сызықты корреляциялық байланыс бар дейміз.

1-мысал. Мына корреляциялық кесте арқылы Y-тің X-ке байланысты регрессия теңдеуінің маңыздылығын $\alpha = 0{,}05$ маңыздылық деңгейінде зерттеңіз.

$Y_i \backslash X_i$	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	n_{yi}
9	2	3	-	-	-	5
13	1	6	3	1	-	11
17	-	4	11	2	-	17
21	-	-	7	6	1	14
25	-	-	-	2	1	3
n_{xi}	3	13	21	11	2	n=50

Шешуі: Жоғарыда қолданылған тәсілдермен мына шамаларды анықтаймыз:

$$\bar{y} = 16{,}92$$

$$\bar{y}_x = 0{,}6762x - 4{,}79 \qquad (*)$$

Енді (7.4.9) пайдаланып қажетті қосындыларды (мәліметтер корреляциялық кесте арқылы берілгендіктен "зілдеме" қосындылар есептеледі) табамыз: $Q = \sum y_i^2 n_{y_i} - \left(\sum y_i \cdot n_{y_i}\right)^2 / n = 15226 - (846)^2 / 50 =$ $= 911{,}68.$ $Q_{факт}$ табу үшін мынадай кесте құрамыз:

x_i	n_{xi}	$\bar{y}_{x_i}$	$\left(\bar{y}_{x_i} - \bar{y}\right)^2 \cdot n_{x\,i}$
22,5	3	10,4	127,5
27,5	13	13,8	126,5
32,5	21	17,2	1,6
37,5	11	20,6	149,0
42,5	2	23,9	97,4
			$\sum = 502$

Мұнда $\bar{y}_{x_i}$ -лер (*) формуласымен есептелді яғни $Q_{факт} = 502$, онда $Q_{калд} = Q - Q_{факт} = 409{,}68$, сонда ,

ал Фишер-Снедекор сын нүктелер кестесінен $F_{сын}(0{,}05;1;48) = 4{,}04$, олай болса $F_{бақ} > F_{сын}$, регрессия теңдеуі маңызды, айнымалылар арасында сызықты біржақты корреляциялық байланыс бар дейміз.

ЕСЕПТЕР

254. Төмендегі корреляциялық кесте бойынша мыналарды табыңыз:

а) Y-тің X-ке байланысты және X-тің Y-ке байланысты таңдамалық сызықты регрессиялық теңдеулерін;

б) Корреляция коэффициентінің маңыздылығын;

в) Бас корреляция коэффициенті ρ-ны және бас регрессия коэффициенттері β_{yx}, β_{xy} -ты бағалайтын сенімділік интервалдарын.

Маңыздылық деңгейі α=0,05.

Y_i \ X_i	1	6	11	16	21	26	n_j
2	2	4	-	-	-	-	6
12	-	6	2	-	-	-	8
22	-	-	3	50	2	-	55
32	-	-	1	10	6	-	16
42	-	-	-	4	7	3	14
n_i	2	10	6	64	15	3	n=100

255. Y нәтижелік белгісі X факторлық белгісінен сызықты тәуелді деп қарастырып, төмендегі корреляциялық кесте бойынша шартты математикалық үміт $M_x(y)$ -ты бағалайтын сенімділік интервалын γ=0,95 сенімділігімен анықтаңыз. (X=5 мәні үшін)

Y_i \ X_i	3	4	6	n_j
1	8			8
4	2	3		5
5		2	5	7
n_i	10	5	5	n=20

256. Y белгісінің X факторлық белгісінен біржақты сызықты тәуелділігін қарастыра келіп, мына белгісіз мәнді $y_0^* / x_0 = 7,\ \alpha = 0{,}05$ маңыздылық деңгейінде болжаңыз.

Y_i \ X	5	6	8	n_j
2		4	1	5
3	2			2
5	1	2		3
n_i	3	6	5	n=10

257. Төмендегі кесте арқылы Y-тің X-ке байланысты сызықтық регрессия теңдеуінің маңыздылығын $\alpha = 0{,}01$ деңгейінде бағалаңыз.

Y_i \ X_i	20	25	30	35	40	n_i
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_i	4	14	46	16	20	n=100

258. Төмендегі кесте арқылы Y-тің X-ке байланысты сызықтық регрессия теңдеуін табыңыз.

Y_i \ X_i	5	10	15	20	n_i
100	2	1	-	-	3
120	3	4	3	-	10
140	-	5	10	8	23
160	-	3	6	-	9
180	-	-	4	1	5
n_i	5	13	23	9	n=50

ЕСЕПТЕР

254. Төмендегі корреляциялық кесте бойынша мыналарды табыңыз:

а) Y-тің X-ке байланысты және X-тің Y-ке байланысты таңдамалық сызықты регрессиялық теңдеулерін;

б) Корреляция коэффициентінің маңыздылығын;

в) Бас корреляция коэффициенті ρ-ны және бас регрессия коэффициенттері β_{yx}, β_{xy} -ты бағалайтын сенімділік интервалдарын.

Маңыздылық деңгейі α=0,05.

Y_i \ X_i	1	6	11	16	21	26	n_j
2	2	4	-	-	-	-	6
12	-	6	2	-	-	-	8
22	-	-	3	50	2	-	55
32	-	-	1	10	6	-	16
42	-	-	-	4	7	3	14
n_i	2	10	6	64	15	3	n=100

255. Y нәтижелік белгісі X факторлық белгісінен сызықты тәуелді деп қарастырып, төмендегі корреляциялық кесте бойынша шартты математикалық үміт $M_x(y)$ -ты бағалайтын сенімділік интервалын γ=0,95 сенімділігімен анықтаңыз. (X=5 мәні үшін)

Y_i \ X_i	3	4	6	n_j
1	8			8
4	2	3		5
5		2	5	7
n_i	10	5	5	n=20

256. Y белгісінің X факторлық белгісінен біржақты сызықты тәуелділігін қарастыра келіп, мына белгісіз мәнді $y_0^* / x_0 = 7,\ \alpha = 0{,}05$ маңыздылық деңгейінде болжаңыз.

X / Y_i	5	6	8	n_j
2		4	1	5
3	2			2
5	1	2		3
n_i	3	6	5	n=10

257. Төмендегі кесте арқылы Y-тің X-ке байланысты сызықтық регрессия теңдеуінің маңыздылығын $\alpha = 0{,}01$ деңгейінде бағалаңыз.

X_i / Y_i	20	25	30	35	40	n_i
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_i	4	14	46	16	20	n=100

258. Төмендегі кесте арқылы Y-тің X-ке байланысты сызықтық регрессия теңдеуін табыңыз.

X_i / Y_i	5	10	15	20	n_i
100	2	1	-	-	3
120	3	4	3	-	10
140	-	5	10	8	23
160	-	3	6	-	9
180	-	-	4	1	5
n_i	5	13	23	9	n=50

259. Дамушы елдің жалпы ұлттық өнімінің Y(млрд.$) сыртқы инвестициялар X(млн.$) шамасына байланысты өзгеруі 20 рет есептелінді.

Y_i \ X_i	150	200	250	300	n_j
4	1	4	3	-	8
4,2	-	5	2	-	7
4,4	2	1	1	1	5
n_i	3	10	6	1	n=20

Y-тің X-ке байланысты сызықтық регрессия теңдеуін табыңыз.

260. $\alpha = 0{,}01$ маңыздылық деңгейінде жоғарыдағы мысалда алынған регрессия теңдеуінің маңыздылығын бағалаңыз.

КЕСТЕЛЕР

1-кесте

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ функциясы мәндерінің кестесі.

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0873	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-кесте

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ функциясы мәндерінің кестесі.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963

2-ші кестенің жалғасы

1	2	3	4	5	6	7	8
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49856
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

3-кесте

$t(n,\gamma)$ мәндері кестесі

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4-кесте

$q(n, \gamma)$мәндері кестесі

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,8	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

5-кесте

χ^2 үлестірімінің сын нүктелері

Еркіндік дәрежелер саны	Маңыздылық деңгейі α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	2	3	4	5	6	7
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

6-кесте

Стьюдент үлестірімінің сын нүктелері

Еркіндік дәрежелер саны	Маңыздылық деңгейі α					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	2	3	4	5	6	7
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,2	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005

Маңыздылық деңгейі α
(бір жақты сын облысы)

7-кесте

Фишер-Снедекор үлестірімінің сын нүктелері
(K_1 үлкен дисперсияға сәйкес еркіндік дәрежелері)
(K_2 кіші дисперсияға сәйкес еркіндік дәрежелері)

K_2 \ K_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Маңыздылық деңгейі $\alpha=0,05$

K_2 \ K_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	3,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	3,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	3,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	3,96	3,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

ЖАУАПТАРЫ
I бөлім
I тарау

1. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

1. $A = C_1\overline{C}_2\overline{C}_3 + \overline{C}_1C_2\overline{C}_3 + \overline{C}_1\overline{C}_2C_3$, $B = \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3 +$
$+ C_1\overline{C}_2C_3 + C_1C_2\overline{C}_3$,

$C = \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3$, $D = C_1C_2C_3$ **3.** а) A б) $A \cdot B$ **4.** а) толық группа құрайды.

б) жоқ в) жоқ **5.** $\frac{5}{2!2!1!6^5}$ **6.** $\frac{4 \cdot C_{24}^2}{C_{10}^{32}}$ **7.** $\frac{n!}{n^2}$ **8.** 0,0286 **9.** 0,009

10. 0,03 **11.** 0,5 **12.** а) 0,55 б) 0,395 **13.** 0,19 **14.** $\frac{24}{91}$ **15.** 0,2 **16.** 0,692

17. 1/406 **18.** а) 0,384 б) 0,096 в) 0,008 **19.** 0,0667 **20.** 0,027 **21.** $\frac{1}{720}$

22. 0,5 **23.** 0,222 **24.** 0,0014 **25.** 0,00000004 **26.** 15/28 **27.** 102 **28.** 0,04 **29.** 1/3

2. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары.

Ең болмағанда бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы.

30. 0,336 **31.** 0,021 **32.** 5/6 **33.** 0,02 **34.** 0,5 **35.** $\frac{499}{1998}$ **36.** 5/18 **37.** 1/36

38. 3/4 **39.** 12/35 **40.** а) 0,86 б) 0,0881 **41.** а) 1/16 б) 1/8 в)15/16 **42.** 0,973 43. m=4

3. Толық ықтималдықтың формуласы. Бейес формуласы.

44. 0,8 **45.** $\frac{71}{84}$ **46.** 2/3 **47.** 0,0031 **48.** 0,8 **49.** $\frac{43}{105}$ **50.** $\frac{14}{17}$ **51.** $\frac{29}{75}$

52. 0,17 **53.** 0,566 **54.** 0,31 **55.** 0,07 **56.** 0,2 **57.** $\frac{n_1(n_2+1)}{m_1n_2 + n_1(n_2+1)}$ **58.** $\frac{14}{29}$

59. 0,579; 0,379; 0,04; 0,002. **60.** $\frac{3}{16}$ **61.** Екінші топтан

4. Тәуелсіз сынақтар тізбегі.

62. 0,885 **62.2** а) 0,885 б) 0,499 в) 0,146 г) 0,835

62.3 $\frac{2}{3}-0{,}033\le\frac{m}{n}\le\frac{2}{3}+0{,}033$ **62.4** $n\ge 18375$ **63.** 0,0729 **64.** 11
65. 0,00058
66. 0,4017 **67.** 0,1318 **68.** 0,4999 **69.** $P_5(2,2,1)+P_5(2,3,0)+P_5(3,2,0)$
70. 0,001 **71.** 3 **72.** 0,0548 **73.** 0,8125 **74.** 0,9251 **75.** 0,0006
76. 19;20
77. 0,246 **78.** 18 **79.** 0,2048 **80.** 55 **81.** 0,05 **82.** 0,273 **83.** 0,246.

II тарау
1. Дискретті кездейсоқ шамалар

84.

x	0	1	2
p	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$,

$M(x)=0{,}5\ D(x)=\frac{3}{8}$,

85.

x	0	1
p	q	p

86.

x	0	1	2
p	0,08	0,44	0,48

87.

x	0	1	2	3
p	0,216	0,432	0,288	0,064

88.

x	1	2	3	...	n
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	$\frac{1}{2^n}$

89.

x	0	1	2	...	n
p	$\left(\frac{1}{2^n}\right)^n$	$C_n^1\left(\frac{1}{2^n}\right)^n$	$C_n^2\left(\frac{1}{2^n}\right)^n$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

90.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

91.

x	0	1	2	...	k	...	n
p	p^n	$C_n^1 qp^{n-1}$	$C_n^2 q^2 p^{n-2}$	...	$C_n^k q^k p^{n-k}$	...	q^n

M(x)=np
D(x)=npq

92.

x	1	2	3	...	n
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{18}{125}$	...	$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

93.

x	0	1/n	...	m/n	...	n/n
p	q^n	$C_n^1 qp^n$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

94.

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

95.

x	-2	0	2
p	q^2	$2pq$	p^2

96.

x	0	1	2	3
p	$\frac{215}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

97. M(ax)=aM(x)

98.

x	0	1	2	3	4
p	0,4096	0,1536	0,4096	0,0256	0,0016

99. M(x)=7,2
D(x)=12,6

101. $v_1 = 0,\ v_2 = 1{,}2,\ v_3 = 0,\ \mu_3 = 0$ **102.** $M(x+y) = 5{,}8$ **103.** $D(x+y) = 2{,}52$
$\mu_2 = 0{,}84;\ \mu_3 = 0{,}072;\ \mu_3 = 1{,}4832$ **105.** $M(x \cdot y) = 1{,}3$ **106.** $M(x \cdot y) = 14{,}72$
$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) \approx 0{,}264$ **108.** 0,17 **109.** $P \approx 0{,}95958$
110. $p \approx 0{,}136$ **111.** 0,143.

2. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар

113.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
p	0,05	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2

114. $$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{4}, 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, 1 \leq x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$$

115. $C = \frac{1}{2\pi}$ **116.** 0,25 **117.** $M(x) = 1.\ D(x) = \frac{1}{3}$

118. $$C = 1,\ F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{x}, x > 1 \end{cases}$$

119. $M(x)=1, D(x)=\frac{13}{36},\ F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{x^2}{2}, 0<x\le 1\\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, 1<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$

120.1. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-\frac{1}{x}, x>1\end{cases}$ 2.0,25 3.0,0625

121. $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{a^2\left(ax-\frac{x^2}{4}\right)}, 0\le x\le 2a\\ 1, x\ge 2a\end{cases}$

122. $M(x)=\frac{3}{2}x_0,\ D(x)=\frac{3}{4}x_0^2$ **123.** $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{2}{\pi}\sin^2 x, 0\le x<\pi\\ 0, x\ge\pi\end{cases}$

124. $P=\frac{1}{3}$ **125.** $M(x)=1,\ D(x)=1$ **126.** $b=1/\pi,\ a=0{,}5.$

127. $M(x)=2, P(1<x<2)=0{,}5.$ **128.** $C=1/3, M(x)=11/36, D(x)=0{,}1844$

$D(x)=0{,}1844$ **129.** $\frac{\pi}{2}$. **130.** $a=2, M(x)=4/3,\ D(x)=8/9.$

131. $M(x)=10/3,\ D(x)=49/11.$ **132.** $A=7,\ D(x)=\frac{49}{12}$

133. $P(4<x<9)=\frac{5}{7}, f(x)=\begin{cases}0, x\le 3\\ \frac{1}{7}, 3<x\le 10,\\ 0, x>10\end{cases}$ **134.** $M(x)=5$ **135.** $M(T)=\frac{1}{K},$

$D(T)=\frac{1}{K^2}$ **136.** $p\approx 0{,}632$ **137.** $M(T)=\frac{1}{\gamma}$ **.138.** 0,038 **139.** $M(x)=\frac{1}{3}$,

140. $C=\frac{1}{\sqrt{14\pi}}$ **141.** 0,023 **142.** 0,8664 **143.** 1.0,5328 2.0,383

144. (2,47; 2,53) **145** 4.6% **146.** $\alpha=a-\sigma\sqrt{3},\beta=a+\sigma\sqrt{3}$

147. $x_1=a-\delta, x_2=a+\delta$, **148.** $\sigma=1{,}48b$ **149.** 0,0124 **150.** 20,5%

151. 1.0,9876 2.0,9938 3. 0,8944 **152.** (−4,4; 4,6) **153.** 0,95

154. 1.0,9772 2.0,9938 3.0,9924 **156.** 0,7016 **157.** 1.0,8536 2.0,9737

158. (2,47; 2,53) **159.** 0,2 **160.** 1. жоқ 2. мүмкін 3. жоқ 4. жоқ

161. 1. а саны қосылады 2. өзгермейді 3. өзгермейді 4. $[a^2+2aM(x)]$ қосылады **163.** Mo=2, $M_D=5$, $v_1=4$, $v_2=20$, $v_3=116{,}8$, $v_4=752$, $\mu_1=0$, $\mu_2=4$, $\mu_3=4{,}8$, $\mu_4=35{,}2$, As=0,6, $E_к=-0{,}8$

164. $v_1=1$, $v_2=1{,}1$, $v_3=1{,}3$ $v_4=\frac{57}{35}$, $\mu_1=0$, $\mu_2=0{,}1$, $\mu_3=0$, $\mu_4=\frac{1}{35}$,

As=0, $E_к=\frac{1}{7}$

165. Mo=δ $M_D=\sigma\sqrt{21n2}$ **166.** $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ ax\left(1-\frac{ax}{4}\right), 0<x\le\frac{2}{a}\\ 1, x>\frac{2}{a}\end{cases}$

3. Кездейсоқ шамалар жүйелері

167.	x	1	4	6	y	0	1	2	3
1)	p	0,16	0,5	0,34	p	0,33	0,3	0,14	0,23

2)

y	0	1	2	3
P(Y/x=4)	$\frac{24}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{7}{50}$

3) X пен Y тәуелді

4) p(x<4, y<2)=0,09 5) $r_{xy}=0{,}056$

168. 1)

x	-1	0	1
p	0,4	0,3	0,3

y	0	1
p	0,3	0,7

2)

x	-1	0	1
p(X/y=1)	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

3) тәуелді

169. 1)

y	0	1	2
p	0,16	0,48	0,36

x	0	1	2
p	0,04	0,32	0,64

170. 1)

x	0	1	2	3
p	$\frac{24}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{24}{50}$

2)

X \ Y	0	1	2
0	0,0064	0,512	0,1024
1	0,0192	0,1536	0,3072
2	0,0144	0,1152	0,2304

Y	0	1	2	3
P	$\frac{24}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{24}{50}$

2)

X \ Y	0	1	2	3
0	0,064	0,48	0,0012	0,001
1	0,192	0,144	0,012	0,003
2	0,092	0,144	0,036	0,003
3	0,064	0,048	0,012	0,001

171. $f_1(x)=\begin{cases}0, & x<4, x<6\\ 0{,}5 & 4<x<6\end{cases}$ $\quad f_2(x)=\begin{cases}0, & y<0, y>3\\ \frac{1}{3}, & 0<y<3\end{cases}$

$$F_1(x,y)=\begin{cases}0, & x<4 \quad y<0\\ \frac{y(x-4)}{6} & 4<x<6,\ 0<y<3\\ \frac{x-4}{2} & 4<x<6,\ y>3\\ \frac{y}{3} & x>6 \quad 0<y<3\\ 1, & x>6 \quad y>3\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}0, x<4, x>6 \quad y<0, y>3\\ \frac{1}{6}, 4<x<6,\ 0<y<3\end{cases}$$

$$P(5<x<6, 1<y<2)=\frac{1}{6}$$

172. 1) $f(x,y)=\begin{cases}0, & x<0, y>0\\ abe^{-by}\cdot e^{-ax}, & x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$

2) $F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-ax}, & x\geq 0\end{cases}$ $\qquad F_2(x)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-by}, & y\geq 0\end{cases}$

3) $P(0<x<\frac{1}{6}, 0<y<\frac{1}{6})=(1-e^{-1})^2$

4. Кездейсоқ шамалар функциясы

175.

2(x+y)+1	1	3	5	7	9	11
P	0,00008	0,0024	0,0276	0,152	0,4032	0,41472

$2y^2$-1	0	1	7	17
P	0,008	0,096	0,384	0,512

176.

X+Y	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

X ·Y	0	1	2	3	4	6	9
P	$\frac{15}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

177.

y	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

178.

X+Y	-3	-2	-1	0	1	2
p	0,01	0,05	0,35	-0,27	0,22	0,1

$x \cdot y$	-2	-1	0	1	2
P	0,06	0,12	0,69	0,12	0,01

5. Үлкен сандар заңы

179. а) p=1 б) $p \geq 0{,}84$ **180.** $p \geq 0{,}6$ **181.** $p \geq 8/9$ **182.** $p \geq 0{,}883$ **183.** 0,64 **184.** $p \leq 0{,}16$ **185.** $p \geq 0{,}75$ **186.** $p \geq 0{,}585$ **187.** 1) $p \geq 0{,}375$ 2) $p \leq 0{,}625$ **188.** $p \geq 0{,}93$ **189.** 7/8

190. 1) p=1 2) $p \geq 0{,}9545$ **191.** $p \geq 0{,}778$ **192.** $p \geq 0{,}99$
193. 1) болады 2) болмайды

194. 0,998 **195.** $n \geq 16000$ **196.** $p \geq 0{,}99$ **197.** $n \geq 500$

198. $n \geq 16000$

199. 1) болады 2) болады **200.** $n \geq 6400$ **201.** $p \geq 0{,}92725$
202. $p \geq 5/6$ **203.** $n \geq 3062$

204. $p \geq 0{,}7625$ **205.** $n \geq 5556$ **206.** 0,936 **207.** $p \geq 0{,}86$

208. $n \geq 1225$

II бөлім

III тарау

Негізгі ұғымдар. Таңдамалық тәсіл

209. $\bar{x}_T = 36{,}31$, $\delta_T^2 = 1{,}254$ $\delta_T = 1{,}12$, $a_S = -0{,}3477$, $e_k = -0{,}2345$

210. $X_Т$=0,8 $D_Т$=1,76 $\delta_T = 1{,}66$ a_S=-0,336 $e_k = -0{,}042$ **211.** $D_Т$=514
212. $X_Т$=76,2 $D_Т$=18,56 **213.** a_S=1,089

214. $X_Т$=16,46 $D_Т$=4,87 $\delta_T = 2{,}21$ a_S=0,49 $e_k = 0{,}36$

IV тарау

Үлестірім параметрлерін бағалау

219. $X_Т$=6,42 **220.** $D_Т$=14,84 S^2=14,9 **225.** б) $14{,}84 \le a \le 18{,}76$

в) $9{,}64 \le a \le 14{,}36$ **226.** $0 \le \sigma \le 1{,}204$ **227.** $0{,}81 \le \sigma \le 5{,}19$
228. (11,28; 14,22)

V тарау

Статистикалық болжамдарды тексеру

237. а) б) в) Нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ
238. Нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ
241. Нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ

VI тарау

Дисперсиялық талдау элементтері

245. $F_{бақ}$=2,9 $F_{сын}$=3,71 **246.** $F_{бақ}$=9,06 $F_{сын}$=7,21 **247.** $F_{бақ}$=4,1 $F_{сын}$=3,06 **248.** $F_{бақ}$=3,1 $F_{сын}$=4,34 **250.** $F_{бақ}$=2,27 $F_{сын}$=3,05

VII тарау

Корреляциялық және регрессиялық талдау элементтері

254. $\bar{y}_x = 1{,}7x - 1{,}8$ корреляция коэффициенті маңызды

255. $3{,}37 \le M_{x=5}(y) \le 5{,}21$

256. $0 \le y_0^* \le 5{,}04$

257. $\bar{y}_x = 1{,}45x - 10{,}37$ регрессия теңдеуі маңызды

ӘДЕБИЕТТЕР

1. *Ақанбай Н.* Ықтималдықтар теориясы. I бөлім. Алматы.: Қазақ университеті, 2001.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Высш. школа, 1979.

3. *Ермаков В.Н.* Справочник по математике для экономистов. М.: Высшая школа, 1987.

4. *Жаңбырбаев Б.С.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. Алматы.: Мектеп, 1988.

5. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. ЮНИТИ, 2000г.

6. *Қабдықайыров Қ.* Жоғары математика. -Алматы.: Респ.баспа кабинеті, 1993.

7. *Қазешев А.Қ.* Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер шығару. -Алматы.: Респ.баспа кабинеті, 1991.

8. *Қазешев А.Қ., Әбенов М., Қойлышов Ү.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы. Алматы.: Респ. баспа кабинеті, 1999.

9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций /Под редакцией Свешникова А.А. М.: Наука, 1965.

10. Справочник по теории вероятностей, математической статистике. М.: Наука, 1985.

11. *Түнгатаров Ә.Б.* Жоғары математика. Экономикалық мамандықтарға арналған курс. I бөлім. Алматы.: Респ.баспа кабинеті, 2000.

12. *Түнгатаров Ә.Б.* Экономикалық мамандықтарға арналған жоғары математика курсы. II бөлім. Алматы.: Экономика баспасы, 2001.

13. *Четыркин Е.М., Калихман И.Л.* Вероятность и статистика. М.: Финансы и статистика, 1982.

14. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989.

МАЗМҰНЫ

Қазешев Алғабас Қазешұлы

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Есептер жинағы

Баспаға Ы. Алтынсарин атындағы Қазақтың білім академиясының ғылыми-әдістемелік кеңесі ұсынған

Редакторы *Ү. Өмірзақ*

Компьютерде беттеген *Н. Мельникова*